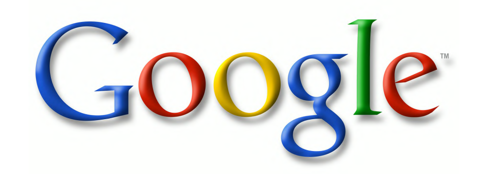





Sammlung Schubert IX

# Analytische Geometrie des Raumes

## I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel

von

Dr. Max Simon




VE RI TAS
SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE

# Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

## „Sammlung Schubert".

**Erschienen sind bis Herbst 1900:**

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Mk. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.

„ VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.

„ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mk. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.40.

**In Vorbereitung bezw. projektiert sind:**

Band IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg.

„ V: **Niedere Analysis** von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

„ XI: **Integralrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Band XV: **Elemente der Astronomie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

„ XVI: **Mathematische Geographie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

„ XVII: **Anwendungen der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg.

„ XVIII: **Geschichte der Mathematik.**

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Ferd. Paul in Budapest.

„ XXI: **Dyanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXII: **Technische Mechanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXIII: **Geodäsie.**

„ XXIV: **Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

„ XXVI: **Räumliche projektive Geometrie.**

„ XXVII: **Geometrische Transformationen** von Dr. Karl Doehlemann in München.

„ XXVIII: **Theorie der höheren algebraischen Kurven.**

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

„ XXX: **Elliptische Funktionen** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

„ XXXI: **Hyperelliptische und Abelsche Funktionen** von E. Landfried in Strassburg.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen.**

„ XXXIII: **Invariantentheorie** von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.

„ XXXIV: **Liniengeometrie** von Dr. Konrad Zindler in Wien.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie.**

„ XXXVI: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

„ XXXVII: **Kinematik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXXVIII: **Potentialtheorie.**

„ XXXIX: **Mechanische Wärmetheorie.**

„ XL: **Theoretische Optik** von Dr. J. Classen in in Hamburg.

Sammlung Schubert IX

# Analytische Geometrie des Raumes

## I. Teil:

## Gerade, Ebene, Kugel

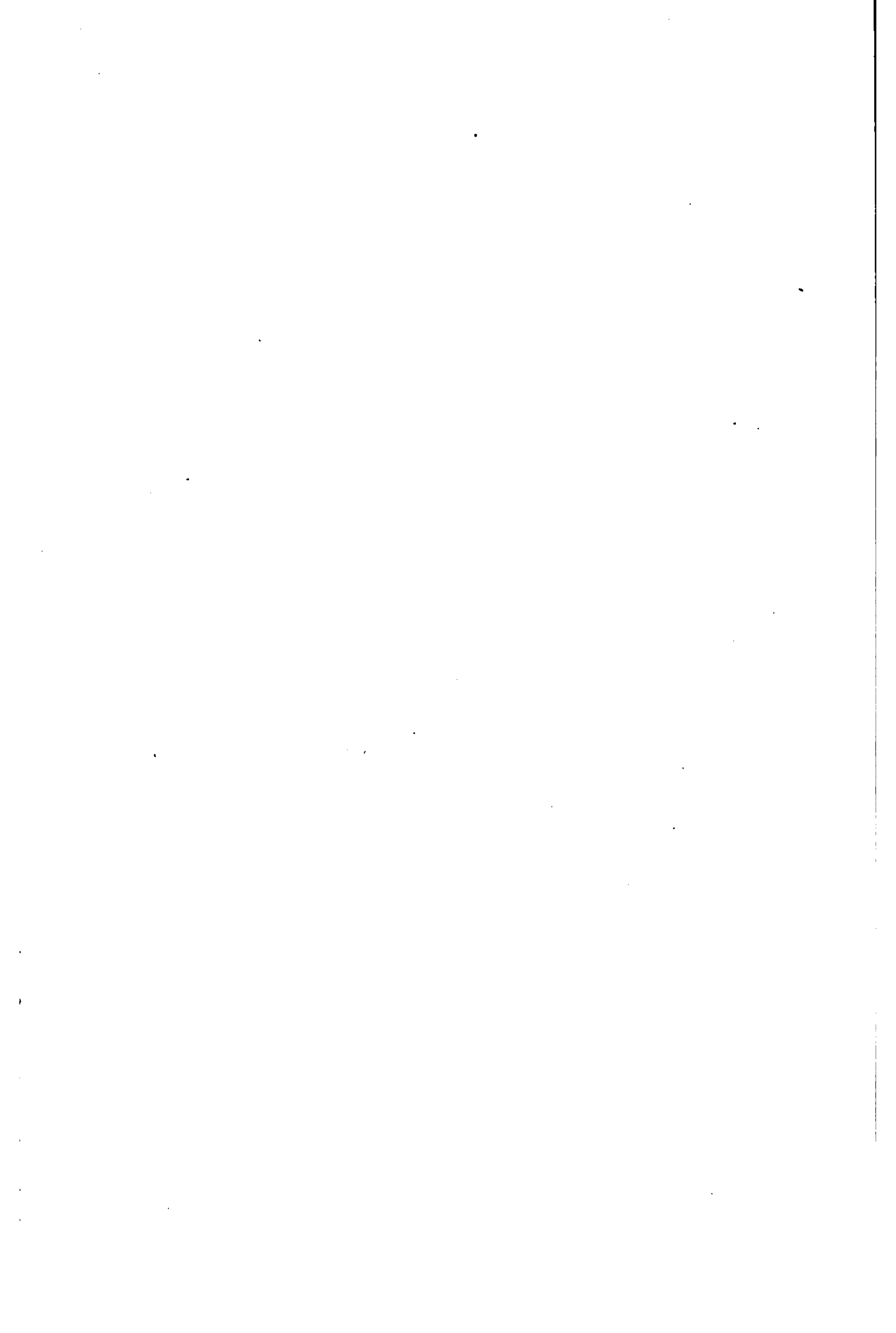
von

**Dr. Max Simon**
Strafsburg i. E.

Mit 35 Figuren

**Leipzig**
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1900

# Inhaltsverzeichnis.



## I. Abschnitt.

# Koordinaten.

### § 1. Das rechtwinklige dreiachsige Koordinatensystem.

Als einfachstes Koordinatensystem im Raum dient die Zusammenstellung dreier Ebenen, welche zu je zwei aufeinander senkrecht stehen (Fig. 1). Jeder Punkt P des

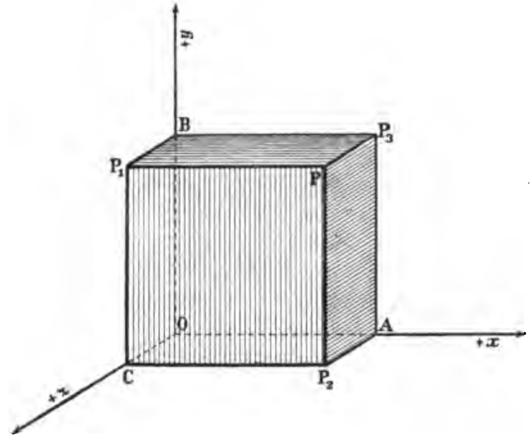



Fig. 1.

Raumes bestimmt seine 3 Abstände von den drei Ebenen, bezw. deren Maſszahlen in Bezug auf die (beliebige, aber feste) Längeneinheit. Die Ebenen selbst heiſsen Koordinatenebenen; ihr Schnittpunkt O: Anfangs- oder Null-

punkt oder Ursprung. Die Geraden, in welchen sich je 2 Ebenen schneiden, sind die Koordinatenachsen, sie werden als x-, y- und z-Achse bezw. Abscissen-, Ordinaten- und Höhenachse unterschieden, die Ebenen selbst werden als: xy-, yz-, zx-Ebene oder kürzer als z-, x-, y-Ebene bezeichnet. Damit umgekehrt jene Abstände bezw. ihre Maſszahlen den Punkt bestimmen, ist in Bezug auf jede der Koordinatenebenen eine Unterscheidung der beiden Teile nötig, in welche sie den Raum teilt (oben und unten, vorn und hinten, rechts und links). Diese Unterscheidung ist getroffen, sobald wir auf jeder der Achsen wie in der Ebene die beiden Richtungen, welche vom Nullpunkt ausstrahlen, durch $+$ und $-$ unterscheiden.

Es würde ohne diese Unterscheidungen 8 Punkte geben, für welche die Abstände dem absoluten Betrage nach gleich wären, entsprechend den 8 Fächern, in welche die drei Koordinatenebenen den Raum teilen. Die so mit Vorzeichen versehenen Maſszahlen der Abstände sind dann Koordinaten des Punktes im Sinne der Definition S. S. VIII S. 1, sie können als parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen (Fig. 1) auch auf den Achsen selbst gemessen werden, so ist $OA = P_1 P = x_p$; $OB = P_2 P = y_p$; $OC = P_3 P = z_p$. Die Punkte $P_1$ etc. sind die Projektionen des Punktes P auf die Koordinatenebenen, die Punkte A, B, C, die auf die Achsen.

Die Koordinaten des Punktes P können auch, nachdem auf den Achsen die positiven Richtungen festgelegt sind, definiert werden als die Strecken, welche von den Achsen durch Ebenen abgeschnitten werden, welche durch P den Koordinatenebenen parallel gelegt werden; z. B. wird die Koordinate $x = OA$ abgeschnitten durch die Parallele zur x-Ebene: $PP_3AP_2$.

Das eben bestimmte Koordinatensystem heiſst: rechtwinkliges, dreiachsiges Koordinatensystem. Man legt jetzt mit Rücksicht auf die Elektrizitätslehre die Achsen wie in Fig. 1, so daſs wenn man eine Schraube von $+x$ nach $+y$ dreht, sie auf $+z$ vorwärts schraubt (Rechts-Schraubensystem).

Aufgabe 1. Wo liegen die Punkte, für welche $z > o$, wo diejenigen, deren $z < o$? [im vordern Halbraum, bezw. im hintern Halbraum].

Aufgabe 2. Wo liegen die Punkte, deren $y = O$ ist?

**Aufgabe 3.** Unterscheide die 8 Oktanten, in welche der Raum durch die 3 Koordinatenebenen, bezw. die drei Koordinatenachsen geteilt ist.

[I {+x, +y, +z; II {+x, +y, −z; III {+x, −y, +z; IV {−x, +y, +z; V {−x, −y, −z; VI {−x, −y, +z; VII {−x, +y, −z; VIII {+x, −y, −z.]

**Aufgabe 4.** Wie liegen die um 4 abstehenden Oktanten, z. B. I und V, III und VII, zu einander?

[Scheitelräume.]

**Aufgabe 5.** Welcher Viertelraum ist die Summe von II und VII?

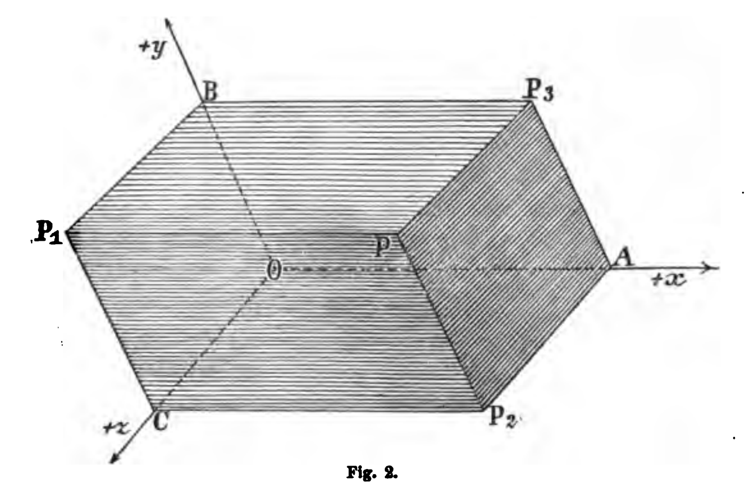



Fig. 2.

**Aufgabe 6.** Welcher Viertelraum ist gekennzeichnet durch $y \leqq 0$, $z \geqq 0$.

**Aufgabe 7.** Führe die Betrachtungen des § 1 durch für ein schiefwinkliges dreiachsiges Koordinatensystem.

[Man bezeichnet gewöhnlich den Winkel, welchen +y mit +z bildet, durch $\lambda$, den von +z und +x mit $\mu$, den von +x und +y mit $\nu$, aber auch mit (yz) etc. Die Punkte $P_1$ etc. (Fig. 2) sind die Projektionen des Punktes P auf die Koordinatenebenen in der Richtung der 3. Achse, also z. B. $P_1$ in der Richtung der x-Achse]. Werden die Winkel der Achsen nicht bezeichnet, so sind sie rechte.

Aufgabe 8. Wo liegen bei beliebigem System die Punkte, welche die Koordinate $x = 3$ haben, wo die Punkte, denen $x = -3$ ist?

[Parallelebene zur $yz$-Ebene durch ?].

Aufgabe 9. Wo liegen die Punkte, für welche $y = 5$, $z = -3$, wo die Punkte, für die $x = a$, $y = b$ ist.

[1. Parallele zur $x$-Achse durch den Punkt . ? . . 2. Parallele zur $z$-Achse durch den Punkt $x = a$, $y = b$ der $xy$-Ebene.]

Aufgabe 10. Von einem Würfel liegt das Grundquadrat ABCD in der $xz$-Ebene, das Deckquadrat im Halbraum $y > 0$, die Koordinaten von A sind 5, 0, 7; die von C sind 7, 0, 5. Bestimme die Koordinaten der übrigen Ecken.

Aufgabe 11. In der $xy$-Ebene liegt das gleichseitige Dreieck ABC als Grundfläche des regelmäfsigen Tetraeders, das seine Spitze S in der Richtung von $+z$, bezw. $-z$ hat. A ist $\{-5, -10, 0$; B $\{5, -10, 0$; C liegt rechts vom Strahl AB; Koordinaten von S?

Aufgabe 12. Achsen schief; $\lambda = \mu = \nu = 60^0$, Aufgabe wie Aufgabe 11, und A $\{5, 3, 0$; B $\{0, 8, 0$.

Aufgabe 13. Wie Aufgabe 12, und A $\{5, 0, 0$; B $\{5, 10, 0$.

Aufgabe 14. $\lambda = 60$, $\mu = 90$, $\nu = 90$. Wie Aufgabe 11, und A $\{a_1, a_2, 0$; B $\{b_1, b_2, 0$.

Aufgabe 15. $\lambda = 60 = \mu = \nu$. Ein Parallelepipedon hat zur Grundfläche die Raute ABCD, es ist A $\{4, 1, 0$; B $\{4, 3, 0$; D $\{6, 1, 0$; A′ $\{4, 1, 2$. Koordinaten von B′, C′, D′? Beschaffenheit der Seitenflächen?

---

## § 2. Entfernung zweier Punkte, Ortsgleichung.

Gegeben $P\{(x_1, y_1, z_1)$ (kürzer $P\{x_1 \ldots)$ noch kürzer $P\{x_1$, und es soll die Entfernung r des Punktes P vom Nullpunkt 0 (als absolute Länge) bestimmt werden.

Es ist (Fig. 3)

$$r^2 = OP_2^2 + y_1^2;\ OP_2^2 = x_1^2 + z_1^2;$$

somit

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \tag{1}$$

Sieht man in dieser Gleichung r als festgegebene Zahl an und $x_1$; $y_1$; $z_1$; als einzeln betrachtet unbeschränkt variabel und nur der Beschränkung durch die Gleichung 1 unterworfen (was durch Weglassen der Marke 1 gekennzeichnet wird), so wird 1) erfüllt von allen Punkten, welche von O die Entfernung r haben und nur von diesen, somit ist 1), der man die Form $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ geben kann, im Sinne von S. S. VIII § 11 die Gleichung der Kugel mit Centrum O und Radius r in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem durch O.

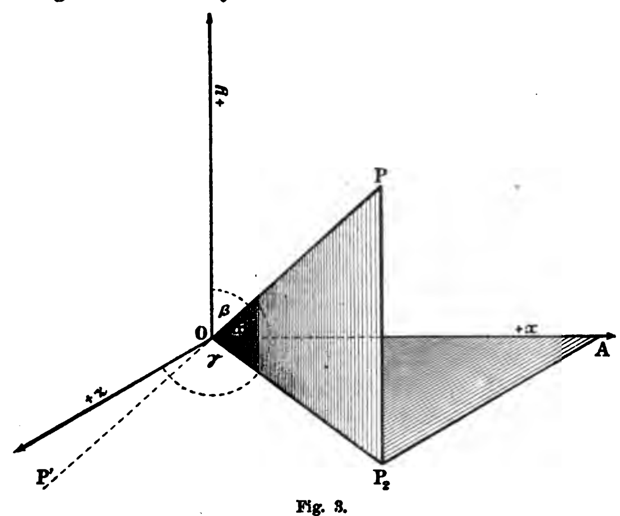



Fig. 3.

Aufgabe 1. Die Entfernung r des Punktes P von O zu bestimmen im System $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

Es ist

$$r^2 = OP_2^2 + y_1^2 - 2\,OP_2 \cdot y_1 \cos PP_2O$$

aber $OP_2^2 = x_1^2 + z_1^2 + 2\,x_1 z_1 \cos(xz)$ und $OP_2 \cos PP_2O = -[x_1 \cos(xy) + z_1 \cos(zy)]$ weil die Projektion des geschlossenen Linienzugs $OAP_2O$ auf die y-Achse gleich Null ist (vgl. S. S. VIII § 10), also

$$1\text{a)}\quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2\,y_1 z_1 \cos\lambda + 2\,z_1 x_1 \cos\mu + 2\,x_1 y_1 \cos\nu = \varphi(x_1 y_1 z_1) = \varphi(x_1),$$

und wenn man die Marken 1 wegläfst, so ist

1a) die Gleichung der Kugel in Bezug auf ein beliebiges dreiachsiges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt das Centrum ist.

Aufgabe 2. Koordinaten der Punkte, deren Projektionen auf die xz-Ebene die Koordinaten $x = 3$, $z = 4$ haben, und deren Abstand von $O = 13$ ist.

Aufgabe 3. $\lambda = \mu = \nu = 60$, $x = y = z = 1$; $r = ?$

Man sieht, dafs eine Gleichung zwischen den als variabel betrachteten Koordinaten $f(x, y, z) = 0$ im allgemeinen eine unendlichfach unendliche Menge von Lösungen hat, und somit (wenn die Funktion stetig ist) eine Fläche darstellt. Zwei Gleichungen $f = 0$; $\varphi = 0$ haben eine einfach unendliche Menge gemeinsamer Lösungen und stellen somit eine Linie dar, was schon daraus erhellt, dafs sie den Schnitt der Flächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ liefern. Drei Gleichungen haben eine endliche Menge von gemeinsamen Lösungen und geben daher eine bestimmte Anzahl von Punkten (reellen und imaginären). So stellt die Gleichung 1) eine Kugel um O mit Radius r dar, die Gleichung $y^2 + z^2 - r^2 = 0$ einen Cylinder, dessen Achse die x-Achse ist, dessen Querschnitt ein Kreis mit Radius r ist.

Die Gleichung $x - x_1 = 0$ ist äquivalent der Gesamtheit aller Punkte, welche von der yz-Ebene den Abstand $x_1$ haben, d. h. sie ist die Gleichung der Parallelebene zur yz-Ebene im Abstand $x_1$ (bei beliebigem System, wenn der Abstand in der Richtung der x-Achse gemessen wird). Die Gleichungen $x - x_1 = 0$; $y - y_1 = 0$ stellen die Gerade dar, in welcher sich die Ebenen $x = x_1$ und $y = y_1$ schneiden, d. h. die Gerade $PP_3$ der Fig. 1 bezw. 2. Und das System der drei Gleichungen $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$ liefert den Punkt P als Schnitt der betreffenden drei Parallelebenen zu den Koordinatenebenen. Die Gleichung der xy-Ebene ist $z = 0$, und wenn man die Gleichungen $h(xyz) = 0$ und $z = 0$ kombinert, so ergeben sie eine Linie in der xy-Ebene, deren Gleichung $h(x, y, 0) = 0$. Betrachtet man also z dauernd als 0, so hat man es wieder mit der analytischen Geometrie der Ebene zu thun.

Aufgabe 4. Welche Fläche stellt die Gleichung $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2$ dar.

Man überzeugt sich leicht, dafs jeder Punkt der Fläche vom Punkte $C\{0, 0, c$ die konstante Entfernung r hat.

Aufgabe 5. Interpretiere $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Aufgabe 6. $\lambda, \mu, \nu$; interpretiere $(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\nu-r^2=0$.

Aufgabe 7. $z(y^2-2px)=0$.

Die Fläche stellt die xy- bezw. z-Ebene und den parabolischen Cylinder $y^2=2px$ dar, also eine zerfallende Fläche dritten Grades.

Aufgabe 8. Interpretiere das System $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z=r-c$.

Aufgabe 9. $x=z\ (\lambda, \mu, \nu)$.

Ebene, welche den Winkel $\mu$ halbiert und durch die y-Achse geht.

Aufgabe 10. $x+z=0$?

[Ebene, welche den Nebenwinkel von $\mu$ halbiert und durch y geht.]

Aufgabe 11. $x^2+y^2=r^2$; $y^2+z^2=r^2$?

Da $x^2-z^2=0$ ist, und diese Gleichung das System der beiden Winkelhalbierenden (s. Aufgabe 9 und 10) darstellt, so zerfällt die Schnittkurve (vierten Grades) der beiden Cylinder in die beiden Ellipsen, in welcher jeder der Cylinder von einer der beiden Halbierungsebenen geschnitten wird. Macht man eine der Halbierungslinien von xz zur $\mu$-Achse, so sind die Gleichungen dieser Ellipsen $2y^2+\mu^2=2r^2$, wo die y- und die $\mu$-Achse die (planimetrischen) Hauptachsen sind. Die Verifikation ist mühelos.

Aufgabe 12. Das Schnittgebilde der Kugeln $x^2+y^2+z^2=r^2$, $x^2+y^2+(z-c)^2=r^2$.

[Da für die gemeinsamen Punkte $z=\frac{1}{2}c$, so ist das Gebilde zugleich der Schnitt einer der Kugeln durch die Parallelebene zur z-Ebene (d. h. xy-Ebene) im Abstande $\frac{c}{2}$; macht man die Parallelen zur x- und y-Achse in dieser Ebene durch den Punkt $z=\frac{c}{2}$, $x=0$, $y=0$ zur $\xi$- und $\eta$-Achse, so ist die Gleichung des Schnittgebildes $\xi^2+\eta^2=r^2-\frac{c^2}{4}$ d. h. es ist ein Kreis.

Aufgabe 13. Die Fläche $y^2+z^2-x^2=0$.

(Die Gleichung ist äquivalent mit $r^2=2x^2$ und stellt

daher den Kegel dar, welcher durch Umdrehung einer Geraden, die mit der x-Achse den Winkel von $45^0$ bildet, erzeugt wird. (Fig. 4.)

Aufgabe 14. Die Gleichung des Kegels, welcher durch Umdrehung einer Geraden erzeugt wird, die mit $+Z$ den Winkel von $60^0$ bildet.

Aufgabe 15. Schnitt des Kegels sub Aufgabe 13 und der Fläche $y^2 - z^2 = 0$. (Fig. 4).

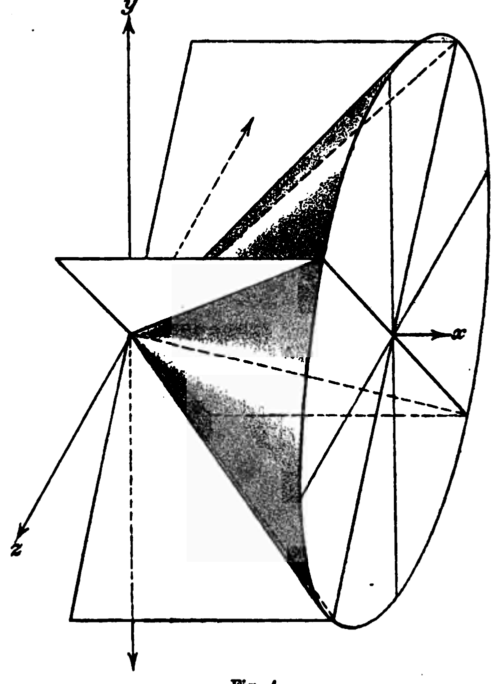



Fig. 4.

Aufgabe 16. Ebene, welche im Punkt der x-Achse $x = a$ auf dieser senkrecht steht (System $\lambda \mu \nu$, kurz System $\lambda$).

[Fig. 5. Die Projektion des geschlossenen Linienzugs OxzMO auf die x-Achse ist O, also:

$$x + z \cos \mu + y \cos \nu = a.]$$

Aufgabe 17. $\lambda$, $\mu$, $\nu$, die Fläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\lambda + 2zx\mu + 2xy\nu = \frac{(x + z\mu + y\nu)^2}{\cos^2\varphi},$$

wo $\lambda \mu \nu$ für $\cos\lambda$ etc. stehen.

[Da nach Aufgabe 16 $x + z\mu + y\nu = u$ durch das vom Punkte P auf die x-Achse gefällte Lot von der x-Achse abgeschnitten wird, und die linke Seite nach Aufgabe 1 gleich $OP^2 = r^2$, so ist $r^2 = \frac{u^2}{\cos^2\varphi}$, d. h. die Fläche ist der Kegel, welcher durch Rotation der Geraden, welche mit der x-Achse den Winkel $\varphi$ bildet, um die x-Achse erzeugt wird. Man sieht auch sofort, dafs das Schnittgebilde der Fläche mit der Ebene, welche im Punkte $x = u$ der

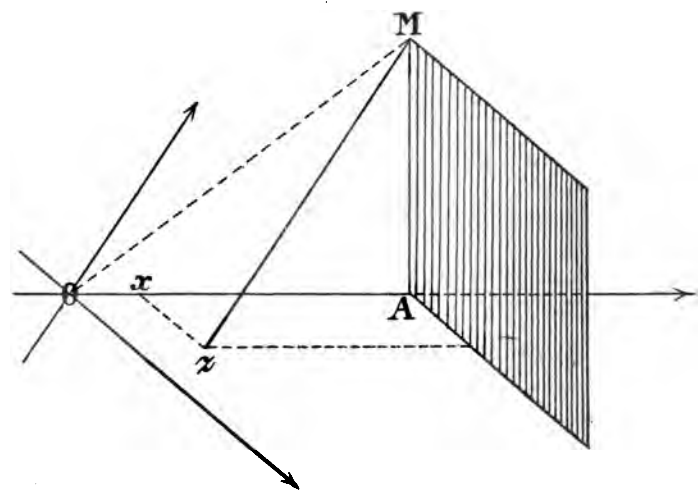



Fig. 5.

x-Achse auf der x-Achse senkrecht steht, zugleich auf der Ebene und der Kugel um O mit dem Radius $\frac{u}{\cos\varphi}$ liegt, also ein Kreis ist.

Aufgabe 18. Die Schnitte des Kegels Aufgabe 17 und der Ebenen $y = 0$, $z = 0$ zu untersuchen.

Aufgabe 19. Die Fläche $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, System $\lambda, \mu, \nu$.

[Die Fläche geht durch den Punkt A auf der x-Achse $x = a$, B auf der y-Achse $y = b$, C auf der z-Achse $z = c$. Sind $P_1 \{ x_1 ..$ und $P_2 \{ x_2 ...$ irgend zwei Punkte der Fläche, so ist $\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} = 1$, wo $\xi = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$ etc., d. h. der Punkt $Q \{ \xi ...$ liegt auch auf der Fläche, Q ist aber, wie aus den Streifensätzen (vgl. auch § 6) folgt, der Punkt, der die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $\lambda$ teilt, d. h. die Fläche hat die Eigenschaft, dafs jede Gerade, welche zwei ihrer Punkte verbindet, ganz in sie hineinfällt, d. h. die Fläche ist die Ebene ABC.]

Aufgabe 20. Die Punkte zu bestimmen, in denen die Ellipsen der Aufgabe 11 von der Gerade $x = 0$, $z = 0$ getroffen werden.

Aufgabe 21. Die Punkte zu bestimmen, die dem Kegel $y^2 + z^2 - x^2 = 0$, der Kugel $y^2 + z^2 + x^2 = 2$ und der Ebene $x + y + z = 1$ gemeinsam sind.

Aufgabe 22. Die Punkte, die den Kegeln $y^2 + z^2 - x^2 = 0$, $y^2 - z^2 + x^2 = 0$, und der Ebene $x + z = 0$ gemeinsam sind.

---

## § 3. Der Strahl durch 0.

Die Richtung des Strahls OP (Fig. 3) wird bestimmt durch die Winkel, welche er mit den positiven Zweigen der Achsen einschliefst, wobei die Winkel $\geq 0$ und $< 180$ genommen werden. Sie seien der Reihe nach $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, der Punkt $P \{ x_1 ...$ und $OP_1$ als blofse Länge betrachtet, gleich r. Es ist (Fig. 3):

$$2)\quad \cos\alpha = \frac{x_1}{r};\ \cos\beta = \frac{y_1}{r};\ \cos\gamma = \frac{z_1}{r};\ x_1 = r\cos\alpha;$$

etc.

Setzt man diese Werte in 1) ein, so ergiebt sich die wichtige Relation:

$$3)\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Diese Relation zeigt, dafs durch zwei Winkel, z. B. durch $\alpha$ und $\beta$ bezw. deren Kosinus, der dritte Winkel bezw. sein

Kosinus nicht völlig bestimmt ist. Dies ist geometrisch klar; derselbe Wert von $\alpha$ bezw. cos $\alpha$ kommt allen Kanten des Kegels zu, der durch Umdrehung eines Strahls entsteht, der mit OX den Winkel $\alpha$ bildet, desgl. bleibt $\beta$ für alle Kanten des betreffenden Kegels mit der Achse OY. Beide Kegel schneiden sich, aufser wenn $\alpha \pm \beta = \pm 90$, in welchem Falle $\cos \gamma = 0$, $\gamma = 90^0$ ist, in zwei symmetrisch zur xy-Ebene gelegene Kanten, deren Winkel mit OZ sich zu zwei Rechten ergänzen. Man sieht aber zugleich, dafs cos $\alpha$, cos $\beta$ und das Zeichen von cos $\gamma$ hinreichen, um die Lage von OP unzweideutig festzustellen; cos $\alpha$, cos $\beta$, cos $\gamma$ heifsen die Richtungskosinus des Strahls OP.

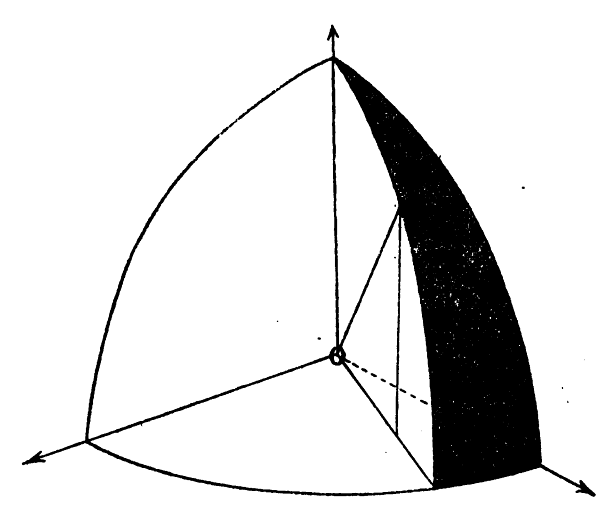



Fig. 6.

Durch r und die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, zwischen deren Kosinus die Gleichung 3) besteht, werden die Koordinaten und damit die Lage des Punktes P bestimmt. Diese Gröfsen liefern daher ebenfalls ein Koordinatensystem, sie heifsen (S. S. VIII § 8) Polarkoordinaten. In der Potentialtheorie und der Integralrechnung werden mit diesem Namen meist die sphärischen Koordinaten, Länge, Breite, Kugelradius bezeichnet; sie sind das älteste bekannte Koordinatensystem. Nennt man die Breite bezw. Dektination, welche

von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gezählt wird, $\varphi$ und die Länge $\vartheta$ (Rektascension), so mifst die Länge den Neigungswinkel zwischen dem beweglichen und festen (Normal-) Meridian, die Breite bestimmt den Parallelkreis. Wir haben (Fig. 6)

$$y = r \sin \varphi; \quad x = r \cos \varphi \cos \vartheta; \quad z = r \cos \varphi \sin \vartheta.$$

Bestimmt das gewöhnliche System den Punkt durch den Schnitt dreier den Achsenebenen parallelen Ebenen, so wird bei Polarkoordinaten der Punkt bestimmt durch den Schnitt einer Kugel um 0 mit zwei Rotationskegeln, deren Spitze 0 ist, und der durch das Zeichen von $\cos \gamma$ festgelegten gemeinsamen Kante; beim sphärischen System ist der Punkt bestimmt durch eine Kugel, den Meridian und den Parallelkreis bezw. durch die Kugel, den Meridian und den Kegel, dessen halber Öffnungswinkel die Breite ist.

Aufgabe 38. Bestimme einen Punkt durch seinen Abstand von der xy-Ebene und durch die Polarkoordinaten seiner Projektion auf diese Ebene (Cylinderkoordinaten).

Sind die drei Richtungskosinus eines Strahls nicht selbst gegeben, sondern drei Zahlen, o, p, q, denen die Kosinus proportional sein sollen, und ist $o = \lambda \cos \alpha$, $p = \lambda \cos \beta$, $q = \lambda \cos \gamma$, so ist nach 3)

$$\lambda = \sqrt{o^2 + p^2 + q^2}.$$

Wird der absolute Betrag der Wurzel $|\lambda|$ mit w bezeichnet, und mit $\varepsilon$ wie gewöhnlich $\pm 1$, d. h. $\sqrt{1}$, so ist $\lambda = \varepsilon w$. Man erhält daher zwei entgegengesetzt gerichtete Strahlen OP und OP′, entsprechend den beiden Systemen

$$\cos \alpha = \frac{o}{w} \ldots, \quad \cos \alpha' = -\frac{o}{w} \ldots.$$

Die drei Zahlen o, p, q bestimmen also den Strahl OP nicht, wohl aber die gerade Linie POP′.

Da jede Gerade g mit den Achsen dieselben Winkel bildet, wie eine durch o zu g gezogene Parallele, so ist die Richtung jeder Geraden g bestimmt durch drei Zahlen o, p, q, denen die Kosinus der Winkel proportional sind, welche g oder eine ihr parallele mit den positiven Zweigen der Achsen bildet. Man kann o, p, q ansehen als die

Koordinaten eines (Richtungs-) Punktes P, dessen Abstand von O gleich w ist; die Gerade g ist dann parallel O P. —

Die Gleichung 3) läſst sich geometrisch interpretieren. Nach einem Elementarsatz der Stereometrie ist die Projektion $F_p$ eines ebenen Flächenstücks F auf eine Ebene, welche mit der eignen den Neigungswinkel i bildet, gleich F cos i. Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist aber gleich dem ihrer Lote, also liefert 3) den Satz:

Das Quadrat einer ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projektionen auf die drei (senkrechten) Koordinatenebenen.

Aufgabe 1. Welchen Winkel macht eine Hauptdiagonale eines Würfels mit jeder der Kanten, die sie schneidet.

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma;\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \alpha = ?$$

Aufgabe 2. Die Strahlen zu bestimmen, welche mit $+x$ und $+y$ den Winkel von $60^0$ einschlieſsen.

[$\cos^2\gamma = \frac{1}{2}$; $\gamma_1 = 45^0$, $\gamma_2 = 90^0 + 45^0$; geometr. Satz? Höhe eines gleichsch. sphär. Dreiecks, von dem die Schenkel $60^0$, die Basis $90^0$ ist.]

Aufgabe 3. Die Richtungskosinus einer Geraden sind den Zahlen 3, 4, 12 proportional, welche Winkel schlieſst sie mit den Achsen ein, und welchen, wenn o p q gleich 7, 6, 2 sind?

Aufgabe 4. Wie Aufgabe 3; o, p, q sind proportinal $a-1$; a; $a(a-1)$ und $\cos\beta$ gleich 1.

Aufgabe 5. Wie Aufgabe 4; $\beta$ gleich $60^0$.

Aufgabe 6. Ein Punkt hat die Länge $120^0$, die Breite $45^0$. Wie verhalten sich seine gewöhnlichen Koordinaten?

Aufgabe 7. Die Gleichung einer Ebene ist $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Welchen Abstand n hat sie vom Nullpunkt?

[Nach der Bedeutung von a, b, c aus Aufgabe 19 § 2 ist Fig. 7: $a\cos\alpha = n = b\cos\beta = c\cos\gamma$, also nach Formel 3:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Aufgabe 8. Die Gleichung einer Ebene, wenn sie vom O Punkt den Abstand $ON = n$ hat, und dies Lot mit den Achsen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bildet.

Aus Aufgabe 19 § 2 bezw. Aufgabe 7 folgt:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - n = 0.$$

Aufgabe 9. Die Aufgabe 7 ohne die Aufgabe 19 § 2 zu lösen.

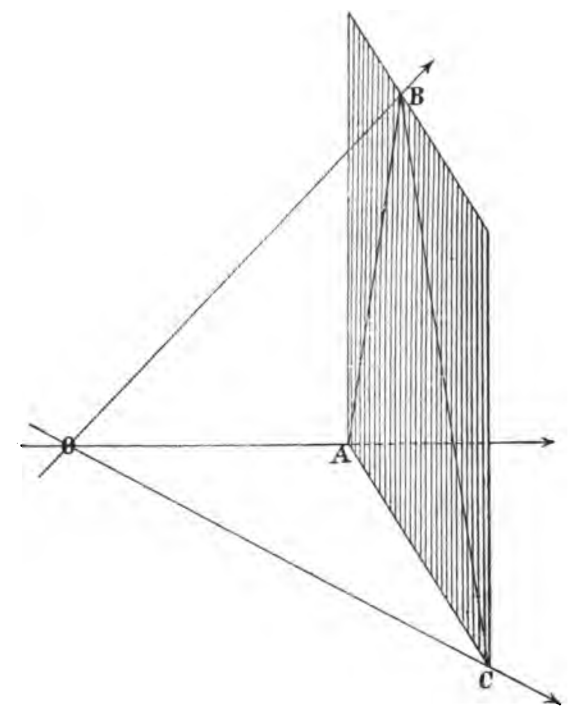



Fig. 7.

[Es ist das Tetraeder OABC gleich $\frac{1}{3}$ ABC n $= \frac{1}{6}$ abc, und $\overline{ABC^2}$ nach dem Satz, der die Formel 3) interpretiert, gleich $AOB^2 + AOC^2 + BOC^2$; man kann auch umgekehrt die Formel 3) aus Aufgabe 7 ableiten.]

Aufgabe 10. Das Achsensystem $\lambda\mu\nu$, der Strahl OP macht mit den Achsen die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; die

Relation zwischen den Winkeln aufzusuchen, welche 3) entspricht.

[Die Aufgabe läſst sich a) als Problem der sphärischen Trigonometrie fassen: Von einem Punkt P sind zwei seiner Abstände von den Ecken eines sphärischen Dreiecks gegeben, den Abstand von der dritten Ecke zu bestimmen. Sei Fig. 8 ABC das Dreieck, AP = 0, BP = p, CP = q, die Winkel u, v, w gleich BPC etc., so ist $\cos a = \cos p \cos q + \sin p \sin q \cos u$ etc., und da $u + v + w = 4R$, so ist $2 \cos u \cos v \cos w + 1 = \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w$, und damit die Aufgabe gelöst; aber auch b) mit Benutzung von Aufgabe 16 § 2 und 7 § 3, wenn wir von einem beliebigen Punkt P}x, y, z des Strahles OP die senkrechten Ebenen auf den Achsen konstruieren, und auf OP gleich n in P die senkrechte Ebene errichten, so haben wir das System

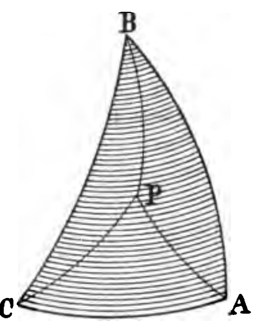


Fig. 8.

$$\begin{aligned} x \qquad + y \cos \nu + z \cos \mu &= n \cos \alpha \\ x \cos \nu + y \qquad + z \cos \lambda &= n \cos \beta \\ x \cos \mu + y \cos \lambda + z \qquad &= n \cos \gamma \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma &= n \end{aligned}$$

woraus sich durch Elimination von xyzn die gesuchte Relation ergiebt.

[Für den mit der Determinantenrechnung vertrauten, als

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \nu & \mu & \alpha \\ \nu & 1 & \lambda & \beta \\ \mu & \lambda & 1 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

wo $\lambda \mu \nu \alpha \beta \gamma$ für den Kosinus der betreffenden Winkel stehen.]

Aufgabe 11. Welchen Winkel schlieſst die Höhe eines regelmäſsigen Tetraeders mit den drei Kanten durch ihre Ecke ein?

[Setzen wir $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = t$ und $\cos\lambda$ etc. $= \frac{1}{2}$, so giebt die Addition der drei ersten Gleichungen Aufgabe 10b) $2(x + y + z) = 3nt$ und die dritte: $t(x + y + z) = n$, also $t^2 = \frac{2}{3}$ etc.

Aufgabe 12. Den sphärischen Radius des Umkreises eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks zu bestimmen.

Aufgabe 13. Welche Winkel schliefst ein Radius der umgeschriebenen Kugel eines reg. Pentagon-Dodekaeders mit den drei Kanten seiner Ecke ein?

$$\left[\cos 108 = -\cos 72 = -\sin 18 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\right].$$

Aufgabe 14. Die Summe der Quadrate der drei Projektionen einer Strecke auf drei unter einander senkrechte Ebenen ist gleich dem doppelten Quadrat der Strecke.

[OP Fig. 3, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = ?$]

---

## § 4. Zwei Strahlen.

Es seien $OP$ und $OP'$ zwei Strahlen, deren Richtungskosinus $a, b, c$ und $a' \ldots$ sind, und $OP$ und $OP'$ der Länge nach gleich 1; Dreieck $POP'$ ist dann gleich $\frac{1}{2}\sin POP'$ $= \frac{1}{2}\sin v$; seine Projektion z. B. auf die $zx$-Ebene ist nach S. S. VIII S. 29 $= \frac{1}{2}(ca' - ac')$, somit liefert der Satz über die Projektion einer Fläche § 3 die Formel:

4) $\sin^2 v = (ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2$.

Projiziert man den geschlossenen Linienzug der Fig. 3 $OAP_2PO$ auf $OP'$, so ist (S. S. VIII, § 10) die Summe der Projektionen Null und somit $a\cos\alpha' + b\cos\beta' + c\cos\gamma' - \cos v = 0$, d. h.

5) $\cos v = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$.

Sind $P$ und $P'$ zwei beliebige Punkte auf denselben Strahlen, und $|OP| = r$; $|OP'| = r'$, so ist:

$$x = r \cos \alpha \ldots . \quad x' = r' \cos \alpha';$$

also

$$5a) \qquad \cos v = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

Damit OP und OP′ auf einander senkrecht stehen, also auch je zwei ihnen parallele Geraden g und g′, mufs $v = 90^0$ sein, $\cos v = 0$, also ist (für rechtwinkliges System) die Bedingung dafür, dafs irgend zwei Geraden, gleichgiltig, ob sich kreuzend oder schneidend, auf einander senkrecht stehen:

$$6) \quad \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0,$$

wo $\cos \alpha$; $\cos \alpha' \ldots$ die Richtungskosinus je eines der g und g′ parallelen Strahlen durch 0, d. h. aber die Richtungskosinus von g bezw. g′ sind.

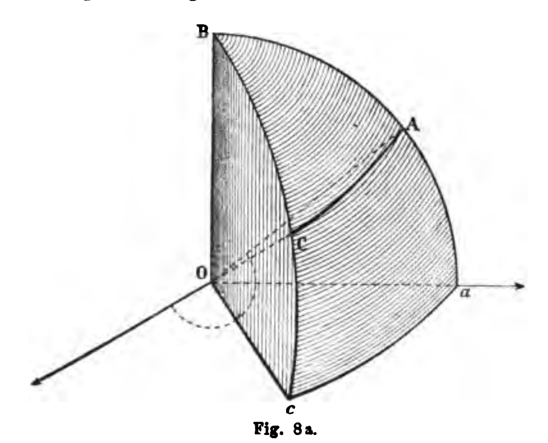



Fig. 8a.

Die Formel 4) giebt aufser den Winkeln v und 180 — v auch 180 + v und 360 — v; die Formel 5) v und 360 — v, dabei ist aber vorausgesetzt, dafs jede der Geraden in einer bestimmten Richtung durchlaufen wird.

Die Formel 5) ist identisch mit der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, dem sphärischen Kosinussatz.

Es sei Fig. 8a ABC das sphärische Dreieck, O die Mitte der Kugel, r der Radius, OB die positive y-Achse,

OAB die z-Ebene und die Bezeichnung der Seiten und Winkel die übliche.

Es ist für den Strahl OA: Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2} - c$; $\beta = c$; $\gamma = 90$.

Die Koordinaten von C ergeben sich, da COc (die Breite) gleich $\frac{\pi}{2} - a$ und cOa (die Länge) gleich B als:

$$x' = r \sin a \cos B;\quad y' = r \cos a;\quad z' = r \sin a \sin B,$$

somit haben wir für die Richtungskosinus des Strahls OC, da z. B. $\cos \alpha' = x' : r$ ist:

$$\cos \alpha' = \sin a \cos B;\quad \cos \beta' = \cos a;\quad \cos \gamma' = \sin a \sin B$$

und für AOC oder b giebt 5) nach Vertauschung der Summanden:

$$7) \qquad \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$

das ist aber der erweiterte Pythagoras auf der Kugel.

Ist $B = 90$, das sphärische Dreieck rechtwinklig, so haben wir den Pythagoras:

$$7a) \qquad \cos b = \cos a \cos c.$$

Aufgabe 15. System $\lambda, \ldots$ Strahl OP{a..., den Neigungswinkel von OP gegen die y-Ebene zu bestimmen.

[Die Aufgabe ist identisch mit der Aufgabe der sphärischen Trigonometrie, die Höhe aus den Seiten zu berechnen, sie kann mit alleiniger Hilfe der planen Trigonometrie und Formel 7a) gelöst werden. Die Höhe sei h, der Höhenabschnitt an A sei p, so ist $\cos c = \cos h \cos p$; $\cos a = \cos h \cos (b - p) = \cos h \cos b \cos p + \cos h \sin b \sin p$

$$\cos^2 h = \cos^2 c + \left(\frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b}\right)^2;$$

$$\sin^2 h = \frac{\sin^2 c \sin^2 b - (\cos a - \cos c \cos b)^2}{\sin^2 b}.$$

Der Zähler von $\sin^2 h$ werde $4 d^2$ genannt; so ergiebt sich durch die gewöhnlichsten Umformungen die wichtige Relation

$$7b) \quad 4 d^2 = 4 \sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c),$$

wo s, wie seit Euler üblich, den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet; also

$$\sin h = 2d : \sin b.$$

Da $\cos a - \cos c \cos b$ nach 7) gleich $\sin b \sin c \cos A$, so ist

$$\sin h = \sin c \sin A \quad \text{und}$$

7c) $2d = \sin b \sin c \sin A$, $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C$, d. i. der Sinussatz im sphärischen Dreieck.

Man überzeugt sich leicht, dafs

$$4d^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

identisch ist mit dem gemeinsamen Nenner der Gröfsen x, y, z, welche das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \quad + y \cos c + z \cos b &= p \\ x \cos c + y \quad + z \cos a &= q \\ x \cos b + y \cos a + z \quad &= r \end{aligned}$$

ergiebt.

---

## § 5. Zwei Punkte und ihre Verbindungslinie.

Es seien $P_1 \{ x_1 \ldots P_2 \{ x_2 \ldots$ irgend zwei Punkte, man ziehe durch $P_1$ die Parallelen zu den positiven Achsen, so wird dadurch das Koordinatensystem parallel verschoben, die Koordinaten von $P_2$ in Bezug auf das neue System seien $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$, so ist z. B. $\eta_2 = y_2 - y_1$. Die Winkel, welche der Strahl $P_1 P_2$ mit den neuen positiven Achsen einschliefst, sind dieselben, welche er mit den alten einschliefst. Die Fig. 3 bezw. die Formel 1 giebt dann, wenn r die Länge von $P_1 P_2$ bezeichnet

8) $$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)$$

und für die Richtungen erhält man:

9) $$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{r}, \ldots\ldots$$

Sieht man in 8) r als fest an, desgl. den Punkt $P_1$, dagegen $x_2, y_2, z_2$ als einzeln betrachtet, variabel und nur der Bedingung 8) unterworfen, so wird 8) von allen Punkten erfüllt, welche von $P_1$ die Entfernung r haben, und ist so-

mit die Gleichung der Kugel, welche um $P_1$ mit dem Radius r geschlagen ist (für rechtwinkliges System).

Aufgabe 1. Die Entfernung der Punkte $P_1$ und $P_2$ zu bestimmen, wenn das Achsensystem $\lambda$ gegeben ist.

[Die Fig. 9 kann für die Parallelverschiebung des Systems $\lambda \mu \nu$ dienen und Formel 1a) giebt dann, wenn für $\xi$ etc. wieder $x_2 - x_1$ etc. gesetzt wird:

$$8a) \quad r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$+ 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \cos \lambda + \ldots = \varphi(x_2 - x_1)$$

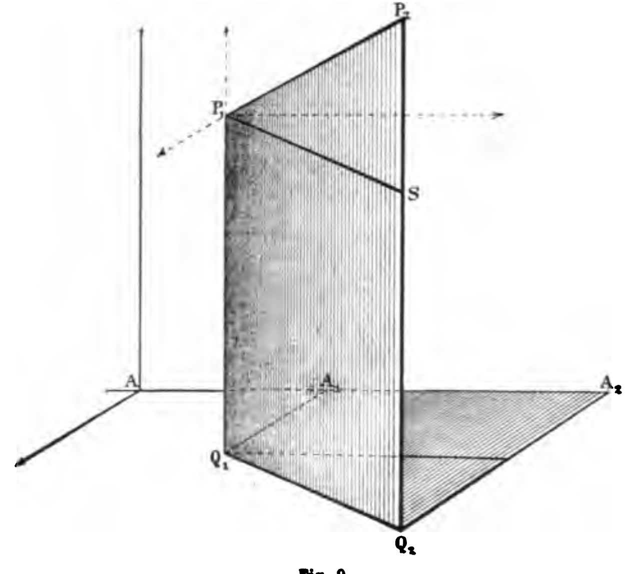



Fig. 9.

und dies ist also die Gleichung der Kugel für beliebiges dreiachsiges Koordinatensystem, wenn $P_1$ das Centrum, r der Radius. Ist $x_2 - x_1 = r\,a$, $y_2 - y_1 = r\,b$, $z_2 - z_1 = r\,c$, so ist, da die Funktion $\varphi$ homogen, $\varphi(a, b, c) = 1$.

Aufgabe 2. Die Formel 8a) aus der Fig. 9 abzuleiten.

Aufgabe 3. Die Formeln 5) mittelst 8) abzuleiten.

[Macht man $OP = 1$, $OP' = 1$, so ist $2 \cos v = OP^2 + OP'^2 - PP'^2$ und da $P \{ \cos \alpha \ldots P' \{ \cos \alpha'$, so ergiebt

sich 5) sofort, desgl. 5a), wenn P und P′ zwei beliebige Punkte auf den Strahlen sind.]

Aufgabe 4. Den Winkel zweier Strahlen, OP und OP′, für das System $\lambda$ etc. abzuleiten.

[$x^2 + x'^2 + 2zy \cos\lambda + 2z'y' \cos\lambda \ldots - (x'-x)^2 - 2(y'-y)(z'-z)\cos\lambda \ldots$]

$$5b)\quad \cos v = \frac{xx' + \ldots + (yz' + zy')\cos\lambda \ldots}{rr'} = \frac{x'(x + y\nu + z\mu) + \ldots}{rr'}$$

Aufgabe 5. Die Bedingung, dafs zwei Geraden y und und y′ mit den Richtungskosinus $\alpha \ldots$ und $\alpha' \ldots$ aufeinander senkrecht stehen, für das Achsensystem $\lambda$ durch die Richtungskosinus auszudrücken.

[Fig. 3, $OP_2$ sei $\eta$, der Winkel $OP_2P$ sei v, dann ist nach dem Sinussatz: $y \sin\beta = \eta \sin(v + \beta)$ oder $y = \eta \cos v + \eta \sin v \operatorname{ctg}\beta$. OP sei r, dann ist mittels des Sinussatzes $y = \eta \cos v + r \cos\beta$; also (vgl. Aufgabe 16 § 2) $y + x \cos\nu + z\cos\lambda = r\cos\beta$, lassen wir der Kürze halber das Kosinuszeichen weg, so haben wir das System

$$9a)\quad \begin{aligned} x + y\nu + z\mu &= r\alpha \\ x\nu + y + z\lambda &= r\beta \\ x\mu + y\lambda + z &= r\gamma \end{aligned}$$

hieraus $x : r = [\alpha(1 - \lambda^2) + \beta(\mu\lambda - \nu) + \gamma(\lambda\nu - \mu)] : 4d^2$ wird der Ausdruck zwischen den eckigen Klammern kurz mit A (bezw. B, C) bezeichnet, so ist die gesuchte Bedingung:

$$9b)\quad \alpha' A + \beta' B + \gamma' C = 0 = \alpha A' + \beta B' + \gamma C'$$

wo z. B.: $C = \sin\nu(\gamma \sin\nu - \alpha \sin\lambda \cos y - \beta \sin\mu \cos x)$, wo z. B. x der Winkel ist, den die y- und die z-Ebene miteinander bilden.

Aufgabe 6. Welchen Wert hat $4d^2$, wenn $\lambda = \mu = \nu = 90^0$, und welchen, wenn $\lambda = \mu = \nu = 60^0$.

Aufgabe 7. Gegeben die Punkte $P_1 P_2$ und ein Strahl durch $P_2$, der mit $P_2 P_1$ den Winkel $\varphi$ bildet, die Gleichung des Kegels, der durch Rotation des Strahls um die Achse $P_2 P_1$ entsteht; $P_1 P_2 = c$, $P_2 P = r$.

$$10)\qquad \cos\varphi = \frac{(x_1 - x_2)(x - x_2) + \ldots}{cr}$$

und in rationaler Form die gesuchte Gleichung

$$[(x_1 - x_2)(x - x_2) + \ldots]^2 = \cos^2 \varphi \, c^2 r^2.$$

Aufgabe 8. Bedingung dafür, dafs der Strahl $P_2 P$ auf $P_2 P_1$ senkrecht steht.

$$10a) \qquad (x_1 - x_2)(x - x_2) + \ldots = 0.$$

Aufgabe 9. Wie Aufgabe 8, System $\lambda \ldots$ [vgl. 5b, wo an Stelle von x, x′ die Differenzen $(x_1 - x_2)$ etc. zu setzen sind.]

Aufgabe 10. Von einem gleichseitigen Dreieck ist A{1, 2, 3, B{5, 5, 15. Die Ecke C hat die dritte Koordinate 10, C zu bestimmen.

8) giebt für AB den Wert 13, dann liefert 10) die Gleichung $4x + 3y = 10, 5$; als dritte Gleichung darf nicht 10) auf B angewandt werden (warum nicht?), sondern man mufs ausdrücken, dafs C auf der um A (bezw. B) mit dem Radius r geschlagenen Kugel liegt; man erhält, wie a priori klar, zwei Wertsysteme.

Aufgabe 11. Die Spitzen der 4 durch ABC der Aufgabe 10 bestimmten regelmäfsigen Tetraeder festzulegen.

Aufgabe 12. Von einem Würfel ist die Grundfläche ABCD, A{10, 0, 0; B{10, 0, 5; D{13, $y_4$, $z_4$; die Koordinaten der Ecken zu bestimmen, wenn $y_4 > 0$.

Aufgabe 13. Wie Aufgabe 12, nur B{10, 15, 8.

Aufgabe 14. Von einem regulären Oktaeder hat das Mittelquadrat die Koordinaten ABCD wie in Aufgabe 12 bezw. 13 die Koordinaten der Spitzen zu bestimmen.

Die Gleichungen 9) stellen bei der Annahme, dafs der Punkt $P_1$ fest sei und ebenso $\cos \alpha_1$ etc., dagegen r und damit der Punkt $P_2$ variabel den Strahl $P_1 P_2$ dar; läfst man für r auch negative Werte zu, so erhält man in 9) die Gleichung der Geraden, welche durch $P_1$ geht und deren Richtung durch die Winkel, welche sie mit den Achsen bildet, bestimmt ist. Wir können diesen Gleichungen die Form geben:

$$11) \quad x = x_1 + r \cos \alpha; \; y = y_1 + r \cos \beta; \; z = z_1 + r \cos \gamma$$

wo r, die Entfernung des laufenden Punktes vom festen Punkt $P_1$, als Parameter dient. Die Gleichungen 11) lassen sich auch schreiben:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = r$$

und wenn o, p, q drei Zahlen sind, die den drei Kosinus proportional, so hat man in

$$11\text{a)} \qquad \frac{x - x_1}{o} = \frac{y - y_1}{p} = \frac{z - z_1}{q}.$$

Die Gleichungen der geraden Linie, welche durch $P_1$ geht, und deren Richtungskosinus den Zahlen o, p, q proportional sind.

Aufgabe 15. Die drei in 11a) enthaltenen Gleichungen geometrisch zu interpretieren.

[$\frac{x - x_1}{o} = \frac{z - z_1}{q}$ stellt eine Ebene parallel der y-Achse dar, welche durch die Gerade $\frac{x - x_1}{o} = \frac{z - z_1}{q}$ der y-Ebene gelegt ist etc., also bestimmt 11a) die Gerade durch ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen.]

Aufgabe 16. Was wird aus dem System 11a) bei beliebigem System $\lambda \ldots$?

[Wir hatten (vgl. Aufgabe 5) $y - y_4 = \frac{r \sin(v + \beta)}{\sin v}$ etc. und wenn $\frac{\sin(v + \beta)}{\sin v}$ mit p etc. bezeichnet wird, bezw. Zahlen, die diesen Faktoren proportional sind, so bleibt das System 11a) für beliebiges Achsensystem als Gleichung der Geraden bestehen und ebenso die Interpretation in Aufgabe 15.

Aufgabe 17. Die Gleichungen der Geraden, welche durch $P_1 \{ 1, -1, 1$ geht und mit den Achsen die Winkel $60^0$, $45^0$, $60^0$ bildet.

Aufgabe 18. $\lambda = \mu = \nu = 108^0$, die Gleichung der Geraden, welche durch O geht und mit den Achsen gleiche Winkel bildet, und ihre Winkel mit den Achsen zu bestimmen (vgl. 13 § 3).

## § 6. Die Teilung der Strecke.

Betrachtet man bei beliebigem Koordinatensystem die Strecken AB und einen Punkt P, der sie im Verhältnis $\lambda$ teilt, wobei (S. S. VIII, S. 31) $\lambda$ negativ gesetzt wird, wenn P innerhalb, und positiv, wenn P aufserhalb der Strecke AB liegt, so geben die Streifensätze (Fig. 10), wenn A $\{ x_1 \ldots$ B $\{ x_2 \ldots$

$$12) \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \ldots .$$

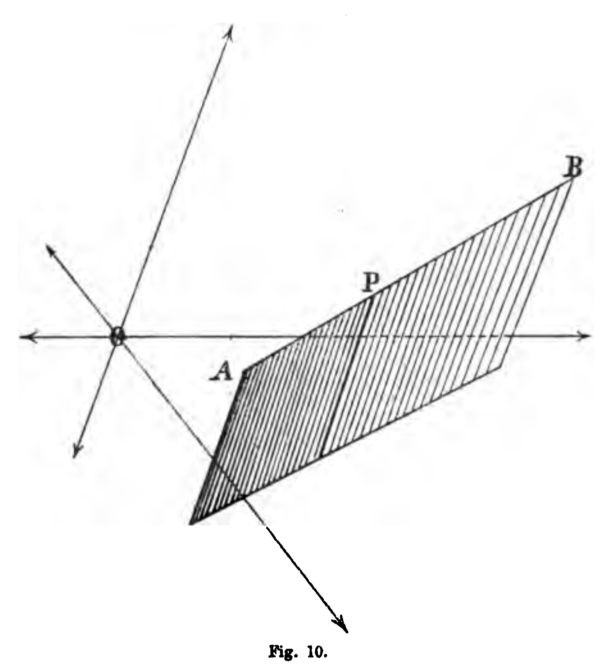



Fig. 10.

Insbesondere ist für die Mitte M von AB die Zahl $\lambda$ gleich $-1$ und

$$12a) \qquad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots .$$

Für $\lambda = 0$ ist P $\{$ A, für $\lambda$ gleich $+1$, $\{ \Omega$ (S. S. VIII, S. 31) und für $\lambda = \pm \infty$, soll P mit B zusammen fallen. Was

in S. S. VIII über die anharmonische bezw. harmonische Beziehung gesagt ist, behält Gültigkeit, nur dafs z. B. zu den Formeln 12 § 4 noch für die dritte Koordinate hinzukommt:

$$13)\qquad (z_1 + z_2)(\zeta + \zeta') = 2\,(z_1 z_2 + \zeta\zeta').$$

Eliminiert man $\lambda$ zwischen den Gleichungen 12), so erhalten wir (vgl. S. S. VIII, S. 33; 5) in

$$14)\qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

bezw. in

$$14a)\qquad \frac{x - x_m}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_m}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_m}{z_2 - z_1}$$

die Gleichungen der geraden Linie, welche durch die Punkte A und B geht, für beliebiges Koordinatensystem.

Aufgabe 1. Die vier Schwerlinien eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt, der sie von den Ecken aus im Verhältnis 3 : 1 teilt.

Es seien A, B, C, D die Ecken, deren Koordinaten durch die Marken 1 bis 4 unterschieden werden; der Schwerpunkt $C_1$ von BCD ist (S. S. VIII, S. 32v) $\{(x_2 + x_3 + x_4)\frac{1}{3}; \ldots$ es sei S der Punkt der $A\sigma_1$ von A aus (innerhalb) im Verhältnis $\lambda = -3$ teilt, dann ist nach 12)

$$S\left\{\frac{x_1 + \frac{3}{3}(x_2 + x_3 + x_4)}{4}\ldots;\quad S\left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.\right.\right.$$

Der Punkt S ist also (S. S. VIII, S. 32) das Centrum der mittleren Entfernungen der Punkte ABCD.

Aufgabe 2. Die drei Verbindungslinien der Mitten der drei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders schneiden sich im Schwerpunkt.

[Die Mitte von AB ist $\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}\ldots\right.$, die von CD $\left\{\frac{x_3 + x_4}{2}\ldots\right.$, die Mitte der Verbindungsstrecke nach 12) $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\ldots$ d. h. S.]

Aufgabe 3. Das Centrum der mittleren Entfernung einer Konfiguration von n Punkten teilt die Linien, welche

die Centren der mittleren Entfernung jeder in ihr enthaltenen Konfiguration von (n — 1) Punkten mit der freien Ecke verbindet, von dieser aus, im Verhältnis — (n — 1).

Aufgabe 4. Die vier Hauptdiagonalen eines Würfels schneiden sich in einem Punkt, dem Centrum der mittleren Entfernung der acht Ecken.

[Die vier Ecken A B C D des Grundquadrats können gesetzt werden $A \{0, 0, 0$; $B \{0, 0, 1$; $C \{1, 0, 1$; $D \{1, 0, 0$, die vier darüberliegenden des Deckquadrats A′ B′ C′ D: $A' \{0, 1, 0$; $B' \{0, 1, 1$; $C' \{1, 1, 1$; $D \{1, 1, 0$; dann ist die Mitte M von A C′ $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.]

Aufgabe 5. Der Satz sub Aufgabe 4 gilt für jedes Rhombenhexaeder.

Aufgabe 6. Die Aufgabe 4 für beliebiges rechtwinkliges System zu lösen.

$A \{x_1$; $B \{x_1 + s\alpha$; $C \{x_1 + s\alpha + s\alpha'$; $D \{x_1 + s\alpha'$; $A' \{x_1 + s\alpha''$; $B' \{x_1 + s\alpha + s\alpha''$; $C' \{x_1 + s\alpha + s\alpha' + s\alpha''$; $D' \{x_1 + s\alpha' + s\alpha''$.

Die Mitte von A C′ $\left\{\frac{\Sigma x}{8}\right.$, die Mitte von B D′ $\left\{\frac{\Sigma x}{8}\right.$ etc. Auch dieser Beweis gilt für beliebiges Rhombenhexaeder und beliebiges Koordinatensystem, nur bedeutet s ev. nicht mehr die Seite und die $\alpha$ nicht die Richtungskosinus.

Aufgabe 7. Die drei Achsen eines regulären Oktaeders schneiden sich in einem Punkt, dem Centrum der mittleren Entfernungen der sechs Ecken.

[Die vier Ecken des Mittelquadrats haben die Koordinaten wie in Aufgabe 6. Die Spitzen 3 und 5 haben die Koordinaten $x_1 + s\lambda \ldots$, $x_1 + s\lambda'$, wo $\lambda$ und $\lambda'$ durch die Gleichungen $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = \frac{1}{2}$; $\alpha\lambda' + \ldots = \frac{1}{2}$; $\alpha'\lambda + \ldots = \frac{1}{2}$; $\alpha'\lambda' + \ldots = \frac{1}{2}$ oder $\lambda^2 + \ldots = 1$; $\lambda'^2 + = 1$ bestimmt werden, aufserdem ist $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$. Da das System, welches die $\lambda$ als Funktion von $\alpha, \alpha' \ldots$ bestimmt, dasselbe ist wie das, welches die $\alpha, \alpha' \ldots$ als Funktion der $\lambda, \lambda' \ldots$ bestimmt, so ist $\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$ und daraus folgt $[(\alpha + \alpha') - (\lambda + \lambda')]^2 + [(\beta + \beta') - (\mu + \mu')]^2 + (\gamma + \gamma') - (\nu + \nu')]^2 = 0$ also $\alpha + \alpha' = \lambda + \lambda'$ etc., also die Mitte M von S S′ $\}$ der Mitte von A C $\{$ der Mitte von B D.]

Aufgabe 8. Denkt man sich die Punkte A, B, C etc. mit den Massen $m_1$, $m_2$ etc. ausgestattet, so heifst der Punkt $S\left\{\frac{\Sigma m_k x_k}{\Sigma m_k}\right.$ etc. der Schwerpunkt des Systems der Massenpunkte A, B, C etc., und wir haben den Satz (vgl. Aufgabe 3): Der Schwerpunkt eines Systems von n Massenpunkten ist der Schwerpunkt des Systems der Schwerpunkte aller Konfigurationen von (n — 1) Massenpunkten.

Aufgabe 9. Gegeben sind n Massenpunkte; die Geraden, welche einen Massenpunkt mit dem Schwerpunkt der übrigen (n — 1) Punkte verbinden, schneiden sich im Schwerpunkt des Systems.

Aufgabe 10. Zu beweisen: Die Punkte 2, 4, 6; 4, 6, 2; 1, 3, 8; liegen in einer Geraden.

Aufgabe 11. Die Geraden, welche die Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen eines Würfels verbinden, schneiden sich in Einem Punkte (vergl. Aufgabe 6).

Aufgabe 12. Die 6 Mitten der 6 Seitenflächen eines Würfels sind die Ecken eines regulären Oktaeders.

## II. Abschnitt.

# Ebene und Gerade.

### § 7. Die Ebene.

Die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ hatten wir in den Formeln 14), sei jetzt $P_3$ ein Punkt aufserhalb der Geraden $P_1 P_2$ und $A \} x_a$ irgend ein Punkt auf der Geraden $P_1 P_2$, bestimmt durch das Verhältnis der Abschnitte der Strecke $P_1 P_2$ nach 12). Dieselbe Formel giebt dann für irgend einen Punkt $P \} x$ auf der Geraden $P_3 A$:

$$x = \frac{x_a - \lambda' x_3}{1 - \lambda'}; \text{ analog } y \text{ und } z$$

und da $x_a = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$, so wird $x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2 - \lambda'(1-\lambda) x_3}{1 - \lambda - \lambda'(1-\lambda)}$.

Setzt man $\lambda'(1 - \lambda) = \mu$, so ergiebt sich

$$\text{15)} \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2 - \mu x_3}{1 - \lambda - \mu};$$

und dieser Gleichung läfst sich die Form geben

$$\text{15a)} \qquad x = \frac{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Indem man $\lambda$ und $\mu$ bezw. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als Parameter ansieht, welche die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, erhält man alle Punkte der Ebene $P_1 P_2 P_3$. Die Gleichungen 15) bezw. 15a) sind also die Gleichungen dieser Ebene mittelst zwei Parametern. Eliminiert man zwischen den drei Gleichungen 15) die Zahlen $\lambda$ und $\mu$, so erhält man als

Gleichung der Ebene bei beliebigem Koordinatensystem die lineare Form

$$16)\qquad ax + by + cz + d = 0,$$

wo die Konstanten a, b, c, d Funktionen der Orte $P_1, P_2, P_3$ sind.

Aufgabe 1. Die Gleichung der Ebene, welche durch die Punkte 0, 0, 1; 0 1 0; 1, 0, 0; geht.

[$x = \frac{-\mu}{1-\lambda-\mu}$; $y = \frac{-\lambda}{1-\lambda-\mu}$; $z = \frac{1}{1-\lambda-\mu}$; $x + y + z = 1$, Verifikation durch Vergleich mit Aufgabe 19, § 2.]

Aufgabe 2. Die Gleichung der Ebene, welche durch die Punkte 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2 geht. Statt der Elimination von $\lambda$ und $\mu$ kann man auch folgenden Weg einschlagen. Die Gleichung hat die Form 16); da vergl. S. S. VIII § 11 die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ äquivalent mit $c\,J(x, y, z) = 0$ ist, so sind nur die Quotienten der Gröſsen a, b, c, d zu bestimmen, bezw. bleibt ein gemeinsamer Faktor $\lambda$ der Konstanten a b c d unbestimmt, bezw. wird gleich 1 gesetzt, wir haben:

$$\begin{aligned} 1a + 2b + 3c + d &= 0 \\ 2a + 3b + 1c + d &= 0 \\ 3a + 1b + 2c + d &= 0. \end{aligned}$$

Durch Addition ergiebt sich d als $-2(a + b + c)$ oder $-2\lambda$. Die Auflösung des Systems giebt: $a = \frac{6\lambda}{18}$, $b = \frac{6\lambda}{18}$, $c = \frac{6\lambda}{18}$; man sieht auch ohne alle Rechnung, daſs das System sich nicht ändert, wenn man a mit b, oder b mit c oder c mit a vertauscht, und kann daher ohne weiteres $a = b = c = 6$, $d = -36$ bezw. $a = b = c = 1$, $d = -6$ setzen; die gesuchte Gleichung ist also

$$x + y + z = 6,$$

wie ohne weiteres zu verifizieren.

Aufgabe 3. Die Gleichung der Ebene durch A}1; 2; 3, B}2; 3; 1, C}0, 5; 1, 5; 4.

[Die Konstanten nehmen die Form 0 : 0 an, sie werden unbestimmt; Grund? vgl. Aufgabe 10 § 6.]

Wir hatten schon gelegentlich der Aufgabe Nr. 8, § 3 die Ebene bestimmt durch ihren Abstand von O und die Richtungskosinus dieses Lotes; wir wollen diese Bestimmung wiederholen.

Der Strahl OP der Fig. 3 habe die Richtungskosinus $\cos\alpha\ldots$ Ist $P\}x\ldots$ und ist die Länge von OP gleich r, so ist für jedes System OP gleich der Projektion des Linienzugs $OAP_2P$, des sog. Koordinaten-Umrisses von P, auf OP also

$$r = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

für rechtwinklige Achsen ist diese Formel eine unmittelbare Folge von 1 und 2, für dies System ist $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, während für schiefwinklige die Beziehung durch § 3 Aufgabe 10 gegeben wird.

Der Strahl OP bestimmt durch seine Lage die in O auf OP senkrechte Ebene $\varepsilon$ und PO ist der Abstand des Punktes P von $\varepsilon$. Verlängert man Fig. 11 OP über O hinaus bis $P'\{x'\ldots$, so ist

$$OP' = x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma' = -(x'\cos\alpha + \ldots)$$

wenn wir aber den Gegensatz und die Lage des Punktes P und P' in Bezug auf $\varepsilon$ dadurch zum Ausdruck bringen, dafs wir den Abstand im ersten Fall positiv, im zweiten Fall negativ setzen, so ist für den Abstand r' der Ebene $\varepsilon$ vom Punkte P'

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = r'.$$

Sei jetzt Q (Fig. 11) ein Punkt $\{\xi\ldots$ auf derselben Seite von $\varepsilon$ wie P, und fällt man von Q auf $\varepsilon$ das Lot QC und macht $OP = CQ = q$, dann ist OPQC ein Rechteck, PQ steht auf OP gleich CQ senkrecht, und wenn wir das Achsensystem samt $\varepsilon$ parallel verschieben, so dafs O nach C kommt, $\varepsilon$ sich in sich selbst verschiebt, so geht P nach Q und die neuen Koordinaten von Q werden den alten von P gleich sein, (Axiom von der Gleichförmigkeit des Raumes). Sind die alten Koordinaten von C resp. u, v, w, so ist $r = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = (\xi - u)\cos\alpha + (\eta - v)\cos\beta + (\zeta - w)\cos\gamma$, aber $u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + OC\cos 90$ ist die Projektion eines geschlossenen Streckenzugs auf OP, somit gleich 0 und also

a) $u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma = 0$,

b) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = r = q$.

Liegt ein Punkt $Q' \} \xi'$ mit $P'$ auf derselben Seite von $\varepsilon$, so erhält man wieder

$$\xi' \cos \alpha' + \ldots = r' = q',$$

nur dafs in diesem Falle $q'$ negativ ist.

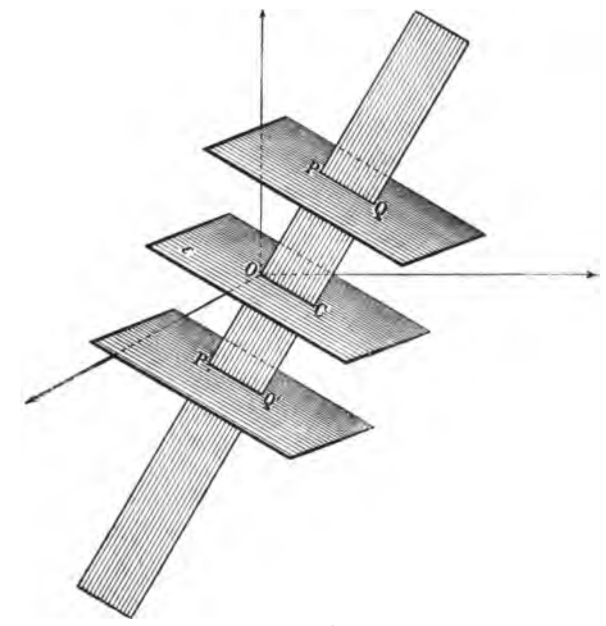


Fig. 11.

Sind also x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes oder Ortes P, so ist

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \text{ oder } H(x\,y\,z)$$

eine Funktion des Ortes P, welche den mit seinem Zeichen versehenen Abstand des Punktes P von der Ebene $\varepsilon$ darstellt. Auf der Ebene $\varepsilon$ selbst ist $H(x, y, z) = 0$, somit ist

$$H = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

die Gleichung von $\varepsilon$.

Die Seite von $\varepsilon$, auf der P liegt, heifst die positive, weil die Funktion H auf der Seite von P positiv ist, die von P' die negative, weil auf ihr H negativ ist, und diese Beziehungen sind nach dem Drobisch-Möbiusschen Umkehrungsprinzip umkehrbar.

Da, nach Festsetzung des Zeichens, r denselben Wert hat für die Punkte der durch P zu $\varepsilon$ gelegten Parallelebene $\eta$ und nur für diese, so ist

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - r = 0$$

die Gleichung von $\eta$. Legt man durch P' zu $\varepsilon$ die Parallelebene $\eta'$, so ist ihre Gleichung zunächst

$$x \cos\alpha + \ldots - r' = 0,$$

diese Gleichung ist $\{$ mit $x \cos(\pi - \alpha) - |r'| = 0$, aber $\pi - \alpha \ldots$ sind wieder die Winkel, welche OP' mit den Achsen bildet, und $|r'|$ ist die absolute Länge von OP', somit folgt:

Für jedes Koordinatensystem kann die Gleichung jeder Ebene die Form annehmen:

$$17)\quad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - n = 0,$$

wo n die stets absolut genommene Länge der Normale von O auf die Ebene ist, und $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel sind, welche diese Normale von O ausstrahlend mit den Achsen bildet.

Die Form 16), kurz mit H bezeichnet, heifst die Hessesche (Göpelsche) Form oder die Normalform der Ebene. Setzt man in die Form H der Gleichung einer Ebene $\eta$ die Koordinaten irgend eines ortsfremden Punktes $Q\{x_q \ldots$ ein, so ist

$$H_q = x_q \cos\alpha + \ldots - n$$

die Summe der drei ersten Glieder giebt den algebraischen Abstand q des Punktes Q von der durch O zu $\eta$ gelegten Parallelebene $\varepsilon$; q ist sicher positiv und $> n$, wenn $\varepsilon$ und Q an verschiedenen Seiten von $\eta$ liegen; $H_q = q - n$ ist dann auch positiv und giebt den Abstand des Punktes Q von der Ebene $\eta$. Liegt Q zwischen $\eta$ und $\varepsilon$, so ist $H_q = q - n$, aber $n > q$, also $H_q = -(n - q)$. Setzen wir fest, dafs Q in diesem Falle negativen Abstand von $\eta$ haben soll, so ist $H_q = -(n - q)$ dieser Abstand. Liegt

$\varepsilon$ zwischen Q und $\eta$, so hat Q negativen Abstand von $\varepsilon$ und es ist $H_q = -q - n = -(q + n)$. Giebt man auch in diesem Falle dem Abstand des Punktes Q, der absolut betrachtet $q + n$ ist, das Zeichen —, so ist $H_q$ auch in diesem Falle der Abstand des Punktes Q von $\varepsilon$. Man kann die Zeichenregel vereinfachen: Q habe positiven oder negativen Abstand von der Ebene $\eta \{ H = 0$, je nachdem Q und O an entgegengesetzten oder gleichen Seiten von $\eta$ liegen. Alsdann haben wir den Satz:

$H_q$ giebt in allen Fällen den mit seinem Zeichen versehenen Abstand des Punktes q von der Ebene $\eta$.

Die Seite der Ebene, auf der der Nullpunkt nicht liegt, heifst die positive, die andere die negative. Dafs bei dieser Festsetzung O von jeder Ebene, die nicht durch O selbst geht, negativen Abstand hat, ist eine natürliche Konsequenz davon, dafs wir n stets positiv nehmen. Denn wenn wir PO, das von O auf die Parallelebene $\varepsilon$ gefällte Lot positiv nehmen, müssen wir OP, das Lot von O auf $\eta$, negativ nehmen.

Für den Fall, dafs die Ebene durch O selbst geht, versagt die Zeichenregel, doch läfst sich auch dann die Festsetzung so treffen, dafs $H_q$ den Abstand liefert.

Aufgabe 4. Die Gleichung der Diagonalebenen des Würfels mit den Kanten $OA = OB = OC = 1$ der Fig. 1.

Aufgabe 5. Die Gleichung der Diagonalebenen des Rhomboeders mit den Kanten $OA = OB = OC = 1$, $\lambda = \mu = \nu = 60$; $\lambda = \mu = \nu = 45$. (Fig. 2.)

Aufgabe 6. Die Ebene, für welche $OP = 10$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 30^0$; $\cos \gamma > 0$.

[Die Ebene ist imaginär, weshalb?]

Aufgabe 7. $\lambda = \mu = \nu = 45^0$; $\alpha = \beta = \gamma$; $OP = n = 1$, Gleichung von $\eta$.

Aufgabe 12, § 3 giebt für $\alpha = \beta = \gamma = r$, wenn $\lambda = \mu = \nu = ?$

$\cos^2 r = \frac{1 + 2 \cos b}{3}$, wir erhalten also zwei Ebenen, welche in einer einfachen Beziehung stehen; welche? Man kann auch direkt ansetzen nach Formel 7):

$$\cos b = \cos^2 r + \sin^2 r \cos 120^0.$$

Aufgabe 8. Welche Winkel schliefsen die Achsen ein, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 45^0$ und die Achsenwinkel gleich sind?

Aufgabe 9. $\lambda = 90^0$, $\mu = 60^0$, $\nu = 90^0$; $\alpha = \beta = \gamma$; $n = 1$.

$\cot^2 r = \frac{3}{4}$; $\cos^2 \alpha = \frac{3}{7}$. (Es ist im sphärischen Dreieck ABC der Fig. 8 $\measuredangle (\beta = 60^0)$.

Aufgabe 10. Die Gleichung der Ebene, welche in O auf der y-Achse (kurz: auf y) senkrecht steht. System $\lambda$..

[$n = 0$, $\alpha = \nu$, $\beta = 0$, $\gamma = \lambda$ also:]

$$17)\qquad x \cos \nu + y + z \cos \lambda = 0.$$

Aufgabe 11. Die Gleichung der Ebene, welche auf z senkrecht steht, und durch den Punkt $P \} x_1$ geht.

[Nach 17): $x \cos \mu + y \cos \lambda + z - n = 0$; aber $x_1 \cos \mu + \ldots - n = 0$, also durch Subtraktion:]

$$17a)\ (x - x_1) \cos \mu + (y - y_1) \cos \lambda + (z - z_1) = 0.$$

Aufgabe 12. Die Gleichung der Ebene, welche durch $P \} x_1$ geht und deren Normale die Richtungswinkel $\alpha, \beta, \gamma$ hat.

$$16a)\ (x - x_1) \cos \alpha + (y - y_1) \cos \beta + (z - z_1) \cos \gamma = 0.$$

Aufgabe 13. Rechtwinkliges System; ein Punkt $P \} x_1$ ist gegeben, die Gleichung der Ebene, welche in der Mitte von OP auf OP senkrecht steht.

[Ist $OP = r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, so ist die gesuchte Gleichung nach 16a) und 2) $\left(x - \frac{x_1}{2}\right)\frac{x_1}{r} + \ldots. = 0$, oder:]

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 - \tfrac{1}{2} r^2 = 0.$$

Aufgabe 14. Wie Aufgabe 13, aber System $\lambda$.

[Es ist nach Aufgabe 10 § 3: $x_1 + y_1 \cos \nu + z_1 \cos \mu = r \cos \alpha$, also]

$$x (x_1 + y_1 \cos \nu + z_1 \cos \mu) + \ldots\ldots - \tfrac{1}{2} r^2 = 0.$$

Aufgabe 15. Welche Ebene stellt bei rechtwinkligem System die Gleichung: $x + y + z - 1,5 = 0$ dar?

Aufgabe 16. Und welche, wenn $\lambda = \mu = \nu = 60^0$ ist?

Aufgabe 17. Wie 16, aber statt 1,5 lies 0,75.

Aufgabe 18. Die Gleichung der Ebene, welche durch O und C der Fig. 1 geht und durch die Mitte M des Quadrats $B P_1 P P_3$.

Aufgabe 19. Wie 18, aber statt O in C setze $P_2$ und A; dann $P_2$ und C; dann O und A.

Aufgabe 20. Wie 18 und 19, aber an Stelle von Fig. 1 tritt Fig. 2.

---

## § 8. Die allgemeine Form der Gleichung der Ebene.

Die Gleichung der Ebene in Hesse'scher Form ist vom ersten Grade in den kartesischen Koordinaten jedes ihrer Punkte, sie ist eine lineare Funktion des Ortes. Umgekehrt haben wir den Satz:

Jede in gewöhnlichen Koordinaten lineare Gleichung stellt eine Ebene dar.

Sei

$$U = ax + by + cz + d = 0$$

die lineare Gleichung. Man kann aufser wenn $d = 0$, durch Multiplikation mit $\sqrt{1}$ stets dafür sorgen, dafs d kleiner 0; durch Multiplikation mit einer Konstanten wird aber die Valenz der Gleichung, d. h. der Inbegriff ihrer Lösungen nicht geändert. Bestimmt man auf der x-Achse den Punkt A durch $x = a$ und entsprechend die Punkte B und C auf den andern Achsen und legt durch A die auf der x-Achse senkrechte Ebene etc., so schneiden sich die drei Ebenen in einem Punkt P, weil sich die drei Achsen in O schneiden. Ist die Länge von OP gleich l, so ist

$$a = l \cos \alpha, \quad b = l \cos \beta, \quad c = l \cos \gamma$$

und folglich, wenn wir die Form U durch l dividieren, wodurch die Valenz nicht geändert wird, so ist $U : l$ und damit U die Gleichung der Ebene, welche auf dem Strahl OP senkrecht steht, und von O den Abstand n gleich $-d : l$ hat.

Um die Form U auf die Hesse'sche oder Normalform zu bringen, ist also die Division durch den Faktor $\pm l$ nötig. Ist das System rechtwinklig, so ist infolge von 3) $\pm l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sigma^{-1}$, wo das Zeichen der Wurzel durch die Gleichung $\sigma d = -n$ bestimmt wird. Wenn

$d = 0$, die Ebene also durch O geht, versagt die Bestimmung und $\sigma$ wird zweideutig, weil d selbst zweideutig. Dies liegt in der Natur der Sache, denn wenn man, statt wie im § 7, von der Normale OP auszugehen, umgekehrt von der Ebene $\varepsilon$ durch O ausgeht, ist es willkürlich, welcher von den Strahlen OP und OP' der Fig. 11 als Normale betrachtet wird. Wir setzen fest, dafs es diejenige sei, für welche $\sigma$ das + Zeichen hat, also $l^{-1}$ ist. Die Seite von $\varepsilon$, auf der diese Normale liegt, heifst die positive und dann bleibt die Bedeutung von $H_q$ auch für diesen Fall bestehen, und $\frac{U_q}{l}$ giebt für den ortsfremden Punkt Q den mit seinem Zeichen versehenen Abstand von der Ebene $U = 0$.

Ist das System schiefwinklig, so mufs zur Berechnung von l die Relation $D = 0$ in Aufgabe 10 § 3 entwickelt werden, man findet:

$$18)\quad D = 1 - \lambda^2 \ldots + 2\lambda\mu\nu - \alpha^2 \ldots + \lambda^2\alpha^2 \ldots + 2\lambda\beta\gamma \ldots - 2\mu\nu\beta\gamma \ldots = 0.$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen der x- und der y-Ebene mit Z etc., so erhält man sofort:

18a) $D = 4d^2 - \cos^2\alpha \sin^2\lambda \ldots + 2\cos\beta\cos\gamma\sin\mu \sin\nu\cos X \ldots = 0$ und wir haben zur Bestimmung von $\sigma^2$ die Gleichung

$$19)\qquad 4d^2 - \sigma^2 f(a, b, c) = 0$$

und zur Bestimmung des Zeichens: $\sigma d = -n$; wo $f(a, b, c)$ die Funktion $a^2 \sin^2\lambda \ldots + 2bc\sin\mu\sin\nu\cos X \ldots$ bezeichnet.

Da $\sigma^2 = l^2 = OP^2$, so ist die Funktion f wesentlich positiv, und nur 0 wenn $a = b = c = 0$ ist. Man kann dies auch algebraisch dadurch beweisen, dafs man f als Summe dreier Quadrate darstellt.

Sind a, b, c alle drei gleich Null, so nimmt die Gleichung $U = 0$ die paradoxe Form an: $d = 0$. Diese Gleichung ist, da d eine gegebene Konstante, die $\neq 0$ vorausgesetzt wird, für keinen Punkt im Endlichen richtig. Ist aber B ein Punkt im Unendlichen, d. h. ein Punkt, für den mindestens eine der Koordinaten, z. B. $x_b$, über jedes Mafs grofs ist, so hat man für ihn, gemäfs der Begriffsbestimmung des Unendlichen $x_b + d = x_b$, d. h. also für diesen Punkt verschwindet d;

wir können sagen, der Punkt B genügt der Gleichung $d = 0$. Wie wir annahmen, dafs alle unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden liegen, so können wir, da $d = 0$ Grenzfall der Form $U = 0$, alle unendlich fernen Punkte im Raum auf einer Ebene sammeln, der unendlich fernen Ebene, und sagen:

Die Gleichung $d = 0$, wo d eine von 0 verschiedene Konstante, ist die Gleichung der unendlich fernen Ebene.

Neben der Hesse'schen Form ist von besondrer Wichtigkeit die Achsenform $A \} ux + vy + wz - 1 = 0$; setzt man nämlich in A die Gröfsen y und $z = 0$, so ist $x = u^{-1}$ und u, v, w sind also die reciproken Werte der Stücke, welche die Ebene von den Achsen abschneidet. Die Form A ist wie die Form H von den Winkeln der Achsen unabhängig (vgl. Aufgabe 19 § 2).

Aufgabe 1. $\lambda = \mu = \nu = 60^0$, $\alpha = 60$, $\gamma = 60$, $n = 0$. $D = 0$ giebt, was a priori klar $\beta = 0$ und $\cos \beta = -\frac{1}{3}$; $\beta$ gleich dem Neigungswinkel des reg. Oktaeders, also

$$x + 2y + z = 0; \quad 3x - 2y + 3z = 0$$

die Gleichungen der Ebenen.

Aufgabe 2. Welchen Abstand hat die Ebene $5x - 4y + 20z - 63 = 0$ von O, und welchen Winkel macht sie mit den (rechtwinkligen) Achsen?

$$l = 21, \; n = 3, \; \cos \alpha = \frac{5}{21} \text{ etc.}$$

Für die Koordinaten der Ebene ist es am bequemsten, die Achsenpunkte festzulegen durch $a = 12{,}6$; $b = -15{,}75$; $c = 3{,}15$.

Aufgabe 3. $\lambda = 90$; $\mu = 45$; $\nu = 90$; $\alpha = 45$; $\gamma = 45$; welchen Wert hat $\beta$? $D = \sin^2 \mu \sin^2 \beta - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \gamma \cos \mu) = 0$, weil $Y = \mu$ und X und $Z = 90$ sind; $\sin^2 \beta = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}5854$.

Aufgabe 4. $\lambda = 90$, $\nu = 90$, $\mu = \text{arc} \cos = \frac{21}{51}$; $\cos \alpha = 0{,}85$, $\cos \gamma = 0{,}15$, welche Werte hat $\beta$? $\sin^2 \mu \sin^2 \beta = 0{,}64$.

Aufgabe 5. $\lambda = 90$, $\nu = 90$; $\cos\alpha = 0{,}85$; $\cos\gamma = 0{,}15$; $\sin^2\beta = \frac{299}{300}$; ? $\mu$.

Aufgabe 6. Gegeben das gerade Koordinaten-Parallelepipedon des Punktes P der Fig. 1; die Gleichung der Diagonalebene durch seine drei Projektionen auf die Koordinatenebenen, zu bestimmen.

Da in dieser Ebene die Parallele zu $P_1 P_2$ durch $P_3$ liegt und damit die Parallele durch $P_3$ zu AB, so ist die gesuchte Gleichung

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{2c} - 1 = 0.$$

Aufgabe 7. Die Form H dieser Ebene anzugeben.

$$\sigma^2 = 1 : [(2a)^{-2} + (2b)^{-2} + (2c)^{-2}] = ?$$

Aufgabe 8. Wie Aufgabe 6, aber beliebige Achsen, d. h. also Ebene $P_1 P_2 P_3$ der Fig. 2. Aus wörtlich gleicher Begründung folgt die nämliche Gleichung:

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{2c} - 1 = 0.$$

Aufgabe 9. Die Ebene durch $A P_2 P_1$ der Fig. 2.

Die Ebene geht durch B und den unendlich fernen Punkt der z-Achse, also ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$\sigma^2 = 4d^2 : u^2 \sin^2\lambda + v^2 \sin^2\mu - 2uv \sin\lambda \sin\mu \cos Z.$$

Aufgabe 10. Was bedeutet das Verschwinden eines Koeffizienten, z. B. a in der Form U?

Die betreffende Ebene ist der betreffenden Achse, z. B. der x-Achse, parallel.

Aufgabe 11. Wie ist das Unendlichwerden eines der Koeffizienten, z. B. c in der Form U, zu interpretieren?

c sei p:q wo q unter jedes Maſs klein, die Multiplikation mit q zeigt dann, daſs U $\{$ z = 0.

Aufgabe 12. In U bleiben a, b, c endlich, aber d wird unendlich?

Die unendlich ferne Ebene.

Aufgabe 13. In U sind a und b endlich, c und d unendlich, aber c : d bestimmt und gleich c′ : d′.

[Die Ebene ist der z-Ebene parallel.]

Aufgabe 14. In U sind a und d endlich, b und c unendlich, b : c = b′ : c′.

---

## § 9. Die Gerade.

Jede Gerade kann in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden, und zwar von jedem Punkt aus; jede Gerade kann in allen Fragen, die ihre Richtung betreffen, ersetzt werden durch die zu ihr Parallele durch einen beliebigen Punkt, in der Regel den Nullpunkt O. Wir setzen auf jeder Geraden eine positive Richtung fest, in der der Parameter r des § 5 positive Werte hat, so dafs also die Summe der gleich langen Strecken AB + BA = 0 und ebenso AM + BM = 0, wenn M die Mitte von AB ist (vgl. S. S. VIII, S. 5 § 3). Als positive Richtung setzen wir die der wachsenden x fest, und für die Geraden der yz-Ebene (und der dieser parallelen) die Richtung der wachsenden y. Mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnen wir die Winkel, welche der positive Strahl der Geraden mit dem positiven Strahl der betreffenden Achse bildet, und verstehen unter Winkel v zweier Geraden den Winkel, welchen ihre positiven Zweige miteinander einschliefsen. Unter diesen Bedingungen bleiben die Formeln, welche wir in den vorigen Paragraphen für Strahlen und Geraden abgeleitet, bestehen und wir stellen sie hier zusammen, wobei die erste Formel für rechtwinkliges System gilt.

1) Die Gerade ist bestimmt durch ihre Richtungswinkel und einen Punkt $P\{x_1 \ldots$

$$1)\qquad \frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = r;$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$2)\ \frac{(x - x_1) + (y - y_1)\nu + (z - z_1)\mu}{\alpha} = \ldots = r.$$

Wo die Kosinuszeichen der Kürze halber weggelassen (vgl. § 5, 9**a**) und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Gleichung D = 0 in Aufgabe 10 § 3 bezw. § 8, 18 genügen.

Wendet man auf 2) den Satz an: „sind zwei oder mehrere Brüche gleich, so ist die Summe bezw. Differenz der Zähler dividiert durch die der Nenner gleich jedem der Brüche“ so erhält man

$$2a)\qquad \frac{x-x_1}{A:4d^2}=\frac{y-y_1}{B:4d^2}=\frac{z-z_1}{C:4d^2}=r.$$

wo A, B, C in Aufgabe 5 § 5 Formel 9a erklärt sind, d. h. (vgl. § 5 Aufgabe 1 Schlufs) $A:4d^2$ etc., sind die Koordinaten des Richtungspunktes, den man erhält, wenn man zur Geraden durch O den Parallelstrahl in der positiven Richtung zieht und auf ihm die Längeneinheit abträgt; ganz dieselbe Bedeutung aber haben $\cos\alpha\ldots$ in der Formel 1, so dafs, wenn wir die Koordinaten des Richtungspunktes a, b, c nennen, die Formeln

$$2b)\qquad \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=r.$$

von den Winkeln der Achsen unabhängig sind.

Die Gröfsen a, b, c heifsen die Richtungskoordinaten der Geraden, ersetzt man die Zahlen durch drei ihnen proportionale Zahlen o, p, q, die Richtungsfaktoren der Geraden, so erhält man die Gleichungen der Geraden in der Form

$$3)\qquad \frac{x-x_1}{o}=\frac{y-y_1}{p}=\frac{z-z_1}{q}.$$

Hieraus ohne weiteres die Gleichung der Geraden, die durch zwei Punkte 1 und 2 geht:

$$4)\qquad \frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}.$$

Die Richtungsfaktoren haben noch eine andere Bedeutung; wenn $x_1, y_1, z_1$ über jedes Mafs wachsen, verschwinden x, y, z gegen sie, und man sieht, dafs o, p, q den Koordinaten des in der Richtung der Geraden unendlich fernen Punktes A proportional sind.

Für viele Aufgaben bequem sind die Formeln, welche aus 3) durch Auflösung nach einer der Variabeln entstehen (vgl. S. S. VIII, S. 42)

$$5)\qquad x=cy+b;\quad z=c'y+b'$$

sie enthalten nur vier Konstanten, statt der sechs der Formeln 2b), sie geben die Gerade als Schnitt der beiden Ebenen, welche die Gerade auf zwei der Koordinatenebenen, — hier der z- und der x-Ebene — in der Richtung der betreffenden Achse projizieren.

Nach der Festsetzung über die positive Richtung erhalten wir für den Winkel v zweier Geraden x bei rechtwinkligem System die Gleichung (vgl. 5)

$$6)\quad \cos v = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'$$

und bei beliebigem System, wenn a, ... a' ... die Richtungskoordinaten der beiden Geraden sind

$$6a)\quad \cos v = a a' + b b' + c c' + (b c' + c b') \cos\lambda + \dots$$

Hieraus die Bedingung, daſs die Geraden aufeinander senkrecht stehen bei rechtwinkligem System.

$$7)\qquad 0 = \cos\alpha \cos\alpha' + \dots$$

$$7a)\qquad 0 = a a' + \dots. = o o' + \dots.$$

und als Bedingung des Parallelismus die Identität der Richtungskoordinaten

$$8)\qquad a = a';\ b = b';\ c = c'.$$

$$8a)\qquad o : o' = p : p' = q : q'.$$

Aufgabe 1. Aus den Richtungsfaktoren o .. einer Geraden g ihre Richtungskoordinaten zu bestimmen.

$$o = \sigma a, \dots;\quad r^2 = 1 = a^2 + . + 2 b c \cos\lambda + = \varphi(a, b, c)$$
$$= \sigma^{-2} \varphi(o, p, q) = \sigma^{-2} \varphi(o).$$

Aufgabe 2. Die Gleichungen einer Geraden y, welche durch O und den Punkt R $\}$ a, b, c geht?

$$9)\qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Daraus folgt, daſs die Richtungsfaktoren o, p, q die Koordinaten eines Richtungspunktes S auf O R sind, dessen Abstand von O gegeben ist durch $r^2 = \varphi(o)$.

Aufgabe 3. Die Gleichung der Geraden $P_1 P_3$ der Fig. 2, P $\}$ a, b, c.

Die Formeln 4) geben $\frac{x}{-a} = \frac{y - b}{o} = \frac{z - c}{c}$ und da a und c endlich, so heiſst dies

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1; \; y = b,$$

was aus der Figur ohne weiteres klar und durch die Formeln 5 bestätigt wird.

Aufgabe 4. Die Gerade durch die Punkte a b c und und a b′ c?

$$x = a; \; z = c; \; y = o : o \text{ d. h. unbestimmt.}$$

Die Gerade ist ....? [ihre Projektionen auf die x- und die z-Ebenen? auf die y-Ebene?]

Aufgabe 5. System λ.., die Geraden g und g′ sind durch die Richtungsfaktoren o .. o′ .. der Richtung nach bestimmt, wie grofs ist ihr Winkel?

$$10) \; \cos v = \frac{o\,o' + p\,p' + q\,q' + (p\,q' + q\,p')\cos\lambda + \ldots}{+\sqrt{\varphi(o)\,\varphi(o')}}$$
$$= \frac{o'\,\varphi'_0 + }{\ldots\ldots} = \frac{o\,\varphi'(o')}{\ldots\ldots},$$

wenn $\varphi'_o$, $\varphi'_p$, $\varphi'_q$ die halben Ableitungen der homogenen quadratischen Form $\varphi$ nach o, p, q bezeichnen (S. S. VIII S. 118).

Aufgabe 6. Die Gleichung einer Ebene durch 0 und die Gerade g { x′ .., o ..?

Da die Ebene durch 0 geht, ist das konstante Glied 0, die Ebene geht durch x′... und den Richtungspunkt S { o, p, q, also

$$u\,x + v\,y + w\,z = 0; \; u\,x' + \ldots = 0; \; u\,o + \ldots = 0,$$

und damit (S. S. VIII S. 151):

$$10a) \; x\,(y'q - z'p) + y\,(z'o - x'q) + z\,(x'p - y'o) = 0.$$

Aufgabe 7. Zusammenhang der Richtungskoordinaten mit den Richtungskosinus seiner Geraden.

Richtungskosinus sind die Kosinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma$, welche die Gerade mit den Axen bildet; abgekürzt $\alpha, \beta, \gamma$, wie die Kosinus der Achsenwinkel $\lambda\,\mu\,\nu$, auch abgekürzt mit $\lambda, \mu, \nu$ bezeichnet wurden.

Die Gleichungen 2) ergeben sofort: $r\,\alpha = A + B\,\nu + C\,\mu$ also

$$11) \qquad \alpha = a + b\,\nu + c\,\mu = \varphi'_a \text{ etc.}$$

Da a, b, c Punkt der Ebene, welche im Richtungspunkt $R \{ a, b, c$ auf dem Strahl $OR \{ \alpha, \beta, \gamma$ senkrecht steht, so ist

$$11a) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma - 1 = 0$$

und damit die Relation in Aufgabe 10 § 3 ohne alle Determinantenrechnung gefunden.

$$D = \alpha A + \beta B + \gamma C - 4 d^2 = 0.$$

Nennt man den Punkt $K \{ \alpha \beta \gamma$ den Kosinuspunkt einer Geraden, so ist der Winkel zwischen OR und OK nach 10) bestimmt durch:

$$11b) \quad \cos \vartheta = \frac{\alpha \varphi'(a) + \ldots}{OK} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\sqrt{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}}$$

woraus folgt, dafs $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leqq \sqrt{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}$ ist, Gleichheit nur wenn $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ d. h. $\lambda = \mu = \nu = 90$.

Der mit Determinantenrechnung Vertraute sieht, dafs die A dieselben Funktionen der adjungierten Form sind, wie die $\alpha$ von A...

Aufgabe 8. Eine Gerade g schneidet die z-Ebene in $C \{ x = a, y = b$; die x-Ebene in $A \{ z = b, y = a$, wo die y-Ebene?

Nach 4) $x_y = \dfrac{-a^2}{b-a}$; $z_y = \dfrac{b^2}{b-a}$.

Aufgabe 9. Eine Gerade g schneidet die z-Ebene in $x = x_z$; $y = y_z$; die x-Ebene in $y = y_x$; $z = z_x$; wo die y-Ebene

$$x_y = \frac{x_z y_x}{y_x - y_z}; \quad z_y = \frac{z_x y_z}{y_z - y_x}.$$

Aufgabe 10.*) Eine Gerade schneidet die x-Ebene in $A \{ b, c$; die z-Ebene in $C \{ a, b'$; die y-Ebene in $B \{ a'', c''$; welche Winkel schliefsen OA, OB, OC ein, und wenn diese Winkel gegeben sind, welches ist der Ort der betreffenden Geraden, wenn $\lambda = \mu = \nu = 90^0$.

nach Aufgabe 9 $a'' = \dfrac{-ab}{b'-b}$; $c'' = \dfrac{b'c}{b'-b}$

*) Diese Aufgabe aus Todhunter's Examples etc., ein T verweist auf diese Quelle; die Aufgaben sind dort für rechtwinklige Achsensysteme gestellt und die Resultate angegeben.

$$g\left\{\frac{x-a}{a}=\frac{y-b'}{b'-b}=\frac{z}{-c};\quad OA\left\{x=0;\ \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\right.\right. \text{ etc.,}$$

also

$$\begin{array}{llll} o\ =o, & p\ =b, & q\ =c & \text{für } OA \\ o'\ =a, & p'\ =b', & q'\ =o & \text{für } OC \\ o''=-ab, & p''=o, & q''=b'c & \text{für } OB \end{array}$$

$$\cos(OA, OC)=\cos\beta=\frac{b'(b+c\lambda)+a(b\nu+c\mu)}{rt};$$

$$\cos\alpha=\frac{-a^2b+b'(-ab\nu+ca\mu+cb'\lambda)}{t\sigma};$$

$$\cos\gamma=\frac{b'c^2-b(ab\nu-ac\mu+b'c\lambda)}{r\sigma};$$

$$\sigma=OB'=|OB(b'-b)|;\ t=OC;\ r=OA.$$

Da für rechtwinkliges System die Richtungskoordinaten mit den Richtungskosinus identisch sind, so erhält man

$$\cos AB=\frac{b'c^2}{r\sigma};\quad \cos^2\gamma=\frac{b'^2c^4}{r^2\sigma^2};$$

$$\sin^2\gamma=b^2(b^2a^2+c^2b'^2+a^2c^2)\cos^2\gamma:b'^2c^4;$$

$$tg^2\gamma=\frac{b^2H}{b'^2c^4};\ tg^2\beta=\frac{H}{b^2b'^2};\ tg^2\alpha=\frac{b'^2H}{a^4b^2};\ \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}=\frac{b'^2}{a^2};$$

$$\frac{tg\,\beta}{tg\,\gamma}=\frac{c^2}{b^2};\ \text{also}\ \frac{b'}{a}=\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{c}{b}=\frac{\beta}{\gamma}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma$ für $\sqrt{tg\,\alpha}\,..$ stehen.

Hieraus folgt, dafs der Punkt A, wenn die Winkel $\alpha\ldots$ fest sind, auf dem festen Strahl $OA\left\{x=0,\ \frac{y}{\gamma}=\frac{z}{\beta}\right.$; und C auf $OC\left\{z=0,\ \frac{x}{\beta}=\frac{y}{\alpha}\right.$ liegt. Der Ort der Geraden AC ist also die Ebene durch die beiden Strahlen, deren Gleichung man mit Rücksicht auf die Zweideutigkeit der Gröfse $\alpha$ die Form geben kann (s. folgende Aufgabe)

$$x\sqrt{tg\,\alpha}+y\sqrt{tg\,\beta}+z\sqrt{tg\,\gamma}=0.$$

Diese Gleichung enthält vier Ebenen.

Aufgabe 11. Durch Rechnung nachzuweisen, dafs die Geraden, welche durch die Punkte $A\{0, \lambda b, \lambda c$; $C\{\mu a, \mu b', 0$

gehen, wo $\lambda$ und $\mu$ zwei Parameter sind, in der Ebene $x b' c + z b a - y a c = 0$ liegen, Achsenwinkel beliebig:

[Man schaffe in beiden Gleichungen $\frac{x - \mu a}{\mu a} = \frac{y - \mu b'}{\mu b' - \lambda b} = \frac{z}{-\lambda c}$ die Nenner fort, multipliziere die erste mit $\lambda c$, die zweite mit $\mu a$ und erhält durch Addition

$$\text{I)} \qquad x \lambda c + z \mu a - \lambda \mu a c = 0$$

und durch Subtraktion mit Benutzung von I die gesuchte Gleichung.]

Aufgabe 12. Verallgemeinerung von Aufgabe 11 $A \{ \lambda a, \lambda b, \lambda c$, $C \{ \mu a', \mu b', \mu c'$.

Aufgabe 13. Schneidet eine Gerade die x-Ebene in $A \{ o, b, c$, die z-Ebene in $C \{ a, b', o$ und wird der Schnittpunkt B mit der y-Ebene auf dem Strahl OB nach B' verschoben wo $OB' = OB\,(b' - b)$ ist, so verhalten sich bei beliebigem System die Flächen der Dreiecke OAC, OB'A, OB'C wie $1 : b : b'$.

$[r^2 t^2 - r^2 t^2 \cos^2 \beta] = H$; $[r^2 \sigma^2 - r^2 \sigma^2 \cos^2 \gamma] = b^2 H$ etc.

Aufgabe 14. Auch bei schiefem System ist der Ort der Geraden, für welche die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ der Aufgabe 10 konstant sind, ein System von vier Ebenen. Bezeichnet man das Verhältnis von $a : b'$ mit x, das von $c : b$ mit z, setzt $\sin^2 \alpha = \alpha \ldots$, so ist

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{x^2 + z^2 - 2 x z \mu}{1 + x^2 + 2 x \nu}; \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x^2 + z^2 - 2 x z \mu}{1 + z^2 + 2 z \lambda}.$$

Man sieht, dafs sich x und z nur durch Vertauschung von $\alpha$ mit $\gamma$, $\nu$ mit $\lambda$ unterscheiden, man erhält für x eine Gleichung vierten Grades, während das zugehörige z eindeutig bestimmt ist, es giebt also (nach Aufgabe 11) vier verschiedene Ebenen.

Aufgabe 15. Die Gleichung der Geraden durch 0, welche auf $g \{ x' \ldots o \ldots$ senkrecht steht. Bezeichnet man die Verbindungen $y' q' - z' p \ldots$ der Aufgabe 6 mit $\varrho, \sigma, \tau$, so ist, wenn $g' \{ 0' \ldots$ die gesuchte Gerade ist

$$1) \qquad o' \varrho + p' \sigma + q' \tau = 0,$$

weil der Richtungspunkt $S'$ der Geraden in der Ebene durch 0 und g liegt (Formel 10a), ferner giebt 10, da $\cos v = 0$ ist:

$$2) \quad o'(o + p \cos \nu + q \cos \mu) + p'(p + q \cos \lambda + o \cos \nu) + \ldots = 0.$$

Die Koeffizienten von $o'$, $p'$, $q'$ sind (vergl. § 9 Aufgabe 5) die halben Ableitungen der homogenen Funktion $\varphi(o, p, q)$, welche das Quadrat der Entfernung des Punktes $S \{ o, p, q$ vom Nullpunkt liefert, nach o, p, q also:

$$2) \quad o' \varphi_o' + p' \varphi_p' + q' \varphi_q' = 0,$$

also (vergl. S. S. VIII S. 137)

$$o' : p' : q' = \sigma \varphi_q' - \tau \varphi_p' : \tau \varphi_o' - \varrho \varphi_q' : \varrho \varphi_p' - \sigma \varphi_o'$$

$$o' \} o (z' \varphi_q' + y' \varphi_p' + x' \varphi_o') - x' \varphi(o, p, q) \text{ etc.}$$

Da (vgl. S. S. VIII S. 117) $\varphi(o, p, q) = o \varphi_o' + p \varphi_p' + q \varphi_q'$ ist.

Wird der Winkel zwischen $OP$, wo $P \} x' \ldots$, und $OS \parallel g$, mit $\vartheta$ bezeichnet, und $OP$ mit r, $OS$ mit s, so ist das Resultat:

$$12) \quad \frac{x}{o r \cos \vartheta - s x'} = \frac{y}{p r \cos \vartheta - s y'} = \frac{z}{q r \cos \vartheta - s z'}.$$

Aufgabe 16. Den Fufspunkt des Lotes zu bestimmen.

Wir haben das System 12) und die Gleichungen von g, die 6 Gleichungen sind mit einander vereinbar, weil identisch $o \varrho + p \sigma + q \tau = 0$ und $x' \varrho + y' \sigma + z' \tau = 0$ ist (wie a priori klar, Grund?) und setzen wir $x = \lambda (o r \cos \vartheta - s x')$ etc., so erhalten wir

$$x = x' - \frac{o r \cos \vartheta}{s}; \; y = y' - \frac{p r \cos \vartheta}{s}; \; z = z' - \frac{q r \cos \vartheta}{s}.$$

Das Lot selbst ist $r \sin \vartheta$.

Aufgabe 17. Gegeben die Geraden $g \} a, b, c$, $g' \} a', b', c'$ der Richtung nach, die Gerade durch 0, welche ihren Winkel halbiert, zu bestimmen.

Da $\cos v = a \varphi_{a'}' + b \varphi_{b'}' + c \varphi_{c'}' = a' \varphi_a' + b' \varphi_b' + c \varphi_c'$, so ist, wenn die gesuchte Gerade $\{ o', p', q'$ ist, weil $x o' + y p' + z q' = x a + \ldots = x a' + \ldots = 0$

$$1) \quad o'(b c' - c b') + \ldots = 0$$

$$2) \quad o'(\varphi_a' - \varphi_{a'}') + \ldots = 0$$

ferner, da $\cos v = \cos v$

$o' \{ a'(c\varphi_c' + b\varphi_b') + a(c'\varphi_{c'}' + b'\varphi_{b'}') - a(c'\varphi_c' + b'\varphi_b')$
$\qquad - a'(c\varphi_{c'}' + b\varphi_{b'}')$
$o' \{ (a + a') - a(a'\varphi_a' + b'\varphi_b' + c'\varphi_c') - a'(\ldots)$
$o' \{ (a + a')(1 - \cos v) \{ a + a',\ p' \{ b + b',\ q' \{ c + c'$

also das Resultat

$$\frac{x}{a + a'} = \frac{y}{b + b'} = \frac{z}{c + c'}.$$

Die Gleichung 2) sagt aus, dafs die Gerade $o'$.. auf der Geraden $(a - a')$; $(b - b')$ senkrecht steht, nach Aufgabe 15 und da diese Gerade bezw. ihr Richtungspunkt der Gleichung 1 genügt, so haben wir für die Halbierungslinie des Nebenwinkels

$$\frac{x}{a - a'} = \frac{y}{b - b'} = \frac{z}{c - c'}.$$

Aufgabe 18. Das Resultat in Aufgabe 17 geometrisch zu interpretieren und damit direkt abzuleiten.

[$a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, sind die Koordinaten der vierten Ecke etc.]

Aufgabe 19. Die Bedingung für den Schnitt der Geraden $g \} x', o$; $g' \} x'', o'$ anzugeben.

Die Methode der Aufgabe 16 giebt, wenn $P \} x'$, $Q \} x''$ und $x'' - x' = \xi'$ etc. und zur Abkürzung $p'q - q'p = [p'q]$ gesetzt wird.

$$13) \quad \xi'[p'q] + \eta'[q'o] + \zeta'[o'p] = 0 = T$$

oder

$$13a) \quad o'[\eta'q] + p'[\zeta'o] + q'[\xi'p] = 0.$$

Aufgabe 20. Die Gerade durch $Q \} \xi$, welche auf $g \{ x', o$ senkrecht steht. Zur Bestimmung der Richtungsfaktoren haben wir

$$1) \quad o'\varphi_o' + p'\varphi_p' + q'\varphi_q' = 0$$

$$2) \quad o'\varrho' + p'\sigma' + q'\tau' = 0,$$

wo $\varrho'$ gleich $[\eta'q]$ etc. in 13a) gesetzt ist, $\xi' = x' - \xi$.

Dieselben Formeln wie in Aufgabe 15 geben dasselbe Resultat, also wenn $P \} x'$, $QP = r$ und der Winkel zwischen $QP$ und $QS$, wo $S$ die alte Bedeutung hat, mit $\theta$ bezeichnet wird

$$\frac{x - \xi}{o\,r \cos\theta - \xi' s} = \frac{y - \eta}{p\,r \cos\theta - \eta' s} = \frac{z = \zeta}{q\,r \cos\theta - \zeta' s},$$

wo $r\,s \cos\theta = \xi' \varphi_o' + \eta' \varphi_p' + \zeta' \varphi_q'$ ist, was Aufgabe 4 § 5, bezw. die Projektion des geschlossenen Linienzugs OQPO auf OS ergiebt.

Für die Länge des Lotes haben wir, vergl. Fig. 12 $|r \sin\theta|$.

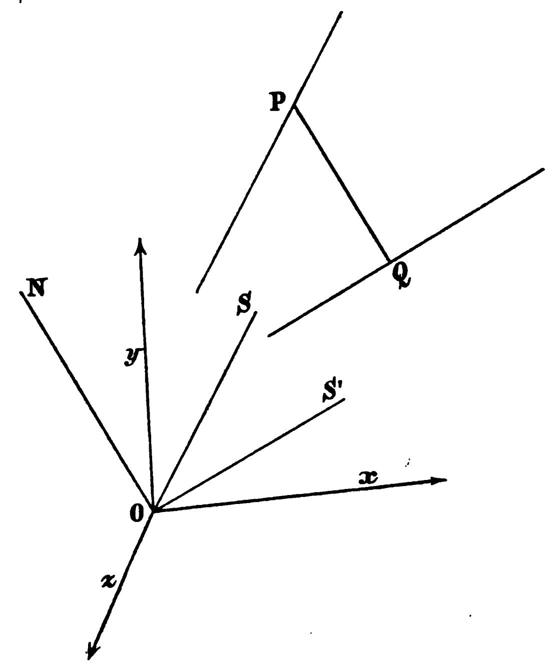



Fig. 12.

Aufgabe 21. Den Fufspunkt F des Lotes (Aufgabe 20) zu bestimmen.

Dieselbe Rechnung, wie in Aufgabe 16, ergiebt

$$x = x' - \frac{o\,r \cos\theta}{s}.$$

Aufgabe 21a. Den geometrischen Satz, der in dieser Formel liegt, auszusprechen.

[Rotiert QP um PF etc.]

**Aufgabe 22.** Die Gleichung der Geraden, welche auf $g \{ x', o$ und $g' \{ x'', o'$ zugleich senkrecht steht.

Diese Gerade schneidet g in $P' \{ \xi$ und $g'$ in $Q' \{ \xi'$. Da die Differenzen $\xi - \xi'$ als Richtungsfaktoren angesehen werden können, haben wir nach Formel 10

$$1)\ (\xi - \xi')\,\varphi_0 + \ldots = 0; \qquad 2)\ (\xi - \xi')\,\varphi_0' + = 0,$$

wo $\varphi_0$ für $\varphi_0'$ und $\varphi_0'$ für $\varphi_{0'}'$ steht; ferner

$$\frac{\xi - x'}{o} = \frac{\eta - y'}{p} = \frac{\zeta - z'}{q}; \quad \frac{\xi' - x''}{o'} = \text{etc.}$$

Setzen wir $\xi - x' = \lambda\, o$; $\xi' - x'' = \lambda' o'$, so erhalten wir aus 1) und 2), wenn $O\,S$, — S Richtungspunkt 0 für g —, gleich s und $S'$ sich auf $g'$ bezieht, also $O\,S = \sqrt{\varphi(o)}$ und $O\,S' = \sqrt{\varphi(o')}$, und $P\,Q = n$ gesetzt wird, ferner v der Winkel $(g\,g')$ ist (Fig. 12):

$$\lambda s - \lambda' s' \cos v = n \cos(n\,g)$$
$$\lambda s \cos v - \lambda' s' = n \cos(n\,g')$$

und hieraus:

$$\lambda = \frac{n}{s \, . \sin^2 v} (\cos(n\,g) - \cos v \cos(n\,g'));$$

$$\lambda' = \frac{n}{s \, . \sin^2 v} (\cos v \cos(n\,g) - \cos(n\,g')).$$

**Aufgabe 23.** Den Abstand k der Geraden g und $g'$ zu berechnen.

Es ist $k^2 = \varphi(\xi - \xi')$. Die Sätze über die homogene quadratische Form beliebig vieler Variabeln aus S. S. VIII geben uns die Formel $G(s + s') = G(s) + 2\,G'(s\,s') + G(s')$. Es ist $\xi - \xi' = (x' - x'') + (\lambda\, o - \lambda' o')$ und entsprechend sind $\eta - \eta'$ und $\zeta - \zeta'$. Wir erhalten

$$k^2 = n^2 + \lambda^2 s^2 + \lambda'^2 s'^2 - 2 \lambda \lambda' s s' \cos v - 2 \lambda s n \cos(n\,g) + 2 \lambda' s' n \cos(n\,g').$$

Sei cos v kurz v, cos (n g) kurz g etc., so ist

$$k^2 = n^2 \left[ \frac{1 + (v g - g')^2 + (v g' - g)^2 + 2 (v g - g')(v g' - g) v}{\sin^4 v} + \frac{2 (v g' - g) g + 2 (v g - g') g'}{\sin^2 v} \right]$$

und da $1 - v^2 = \sin^2 v$, so erhält man

$$14)\quad k^2 = (1 - v^2 - g^2 - g'^2 + 2 g g' v) \frac{n^2}{\sin^2 v}.$$

Die Klammer ist aber die wohlbekannte Gröfse $4 d^2$ (§ 4 Aufgabe 15), deren Wurzel $2 d$ v. Staudt den Sinus der dreiseitigen Ecke $O S S' N$ genannt hat, wo $ON \parallel PQ$; wir wollen sie jetzt $\sin E$ nennen und erhalten

$$15)\quad k^2 \sin^2 v = n^2 \sin^2 E;\; k \sin v = n \sin E.$$

Die Formel zeigt, dafs $k^2$ verschwindet, wenn $\sin E$ verschwindet, was bedeutet, dafs $ON$, $OS$, $OS'$ in Einer Ebene liegen, vgl. Aufgabe 19; wenn aber $v = 0$, die Geraden $g$ und $g'$ parallel, so wird $k$ unbestimmt, was alles a priori klar.

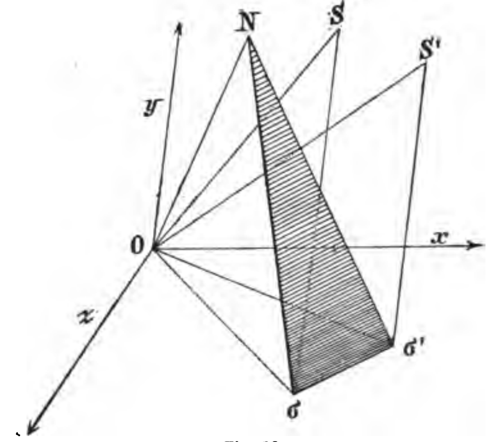



Fig. 13.

Aufgabe 24. Die Bedingung, dafs die Geraden $g$ und $g'$ sich schneiden in Aufgabe 19 mit der Bedingung $\sin E = 0$ zu identifizieren.

Wir können $\xi', \eta', \zeta'$ der Aufgabe 19 als die Richtungsfaktoren der Geraden $PQ$ ansehen, die Punkte $N, S, S'$ als Richtungspunkte. Aus der Bedeutung von $[p' q]$ s. S. S. VIII S. 29 folgt dann, dafs z. B. $\eta' [q' o]$ der sechsfache Inhalt der Pyramide (Fig. 13) $N O \sigma \sigma'$ ist, dividiert durch $\sin \mu \sin \lambda \sin Z$, d. h. durch den Sinus der Koordinatenecke $2 d^2$ oder $\sin \varkappa$; $\sigma$ und $\sigma'$ sind die Projektionen von $S$ und $S'$

in der Richtung der Y-Achse auf die y-Ebene. Nach einem bekannten Elementarsatz der Stereometrie (Baltzer 14) ist, wenn die Pyramiden $V_1$ etc. genannt werden: $V_1 + V_2 + V_3 = ONSS' = V$, also

13) $T \sin \varkappa = 6\,V$; V ist aber $\frac{1}{6} \sin E . nss'$, daher

$$16) \qquad \sin E = T \sin \varkappa : nss'.$$

Aufgabe 25. Den Satz aus Aufgabe 24:

„Das Tetraeder ONSS' ist gleich der algebraischen Summe seiner 3 Projektionstetraeder auf die Koordinatenebenen"

durch Rechnung zu beweisen.

Für den in Determinantenrechnung Geübten ist sofort klar, dafs

$$\sin^2 E = \begin{vmatrix} 1 & v & g \\ v & 1 & g' \\ g & g' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_a & \varphi_b & \varphi_c \\ \varphi_a' & \varphi_b' & \varphi_c' \\ \varphi_a'' & \varphi_b'' & \varphi_c'' \end{vmatrix},$$

wo a b c die Richtungskoordinaten von g, a' .. die von g' und a'' .. die von PQ bezw. ON sind; aber $|\varphi_a \; \varphi_b' \; \varphi_c''|$ ist wieder $|a \; b' \; c''| \sin^2 \varkappa$, also

$$\sin E = (a\, b'\, c'') \sin \varkappa = T \sin \varkappa.$$

Auch ohne Determinanten macht die Rechnung keine Schwierigkeiten, wenn man sich erinnert, dafs $a\varphi_a + ..$ etc. $= \varphi(a) = 1$ und dafs $a'\varphi_a + \ldots = a\varphi_a'$ etc. ist.

Aufgabe 26. Sind A, B, C drei beliebige Punkte, so ist

$$V = OABC = \frac{1}{6} \sin \varkappa \left[x' \, [y'' z'''] + \ldots\right] = \frac{1}{6} \sin \varkappa \, D\,(x' y'' z''').$$

Aufgabe 27. Zieht man durch einen beliebigen Punkt 0 im Raume zu den zweifach unendlich vielen Verbindungsstrecken zweier kreuzenden Geraden die Parallelen in der Richtung von g nach $g_1$ nach Länge und Richtung, so beschreibt der freie Punkt N die Parallebene zu der durch O zu g und $g_1$ gelegten Parallelebene im Abstande k.

[Beweis: $k \sin vss' = n \sin Ess'$; $2kg = CV = 2hg$; also $k = h$, d. h. also N hat von $OSS'$ den konstanten Abstand k.]

Um also den kürzesten Abstand zweier kreuzenden Geraden g und g′ zu konstruieren, ziehe man durch O zu g und g′ die Parallelen, ziehe irgend eine Verbindungsstrecke PQ, verschiebe sie parallel nach O, und fälle vom freien Endpunkt N auf die Parallelebene durch O zu g und g′ das Lot, so ist dies der kürzeste Abstand.

Aufgabe 28. Die Bedingung, dafs die Gerade g und g′ sich schneiden, oder w. d. ist, dafs die Strahlen ON, OS, OS′ in einer Ebene liegen, unmittelbar durch die Richtungskosinus der Geraden, d. h. durch die Kosinus der Winkel, welche sie mit den Achsen bilden, auszudrücken. Bezeichnet man $\sin\lambda$ etc. mit $\lambda$, $\cos\alpha$ etc. mit $\alpha$, $\cos X$ etc. mit X, so ist, abgesehen von dem Nenner $\sin^2 \varkappa$ nach Aufgabe 5 § 5:

$$a = \lambda(\alpha\lambda - \beta\mu Z - \gamma\nu Y); \quad b = \mu(\beta\mu - \gamma\nu X - \alpha\lambda Z) \text{ etc.}$$

und für den mit Determinantenrechnung Vertrauten sofort klar, dafs

$$T = \frac{s}{\sin^6 \varkappa} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -Z & -Y \\ -Z & 1 & -X \\ -Y & -X & 1 \end{vmatrix} \lambda^2 \mu^2 \nu^2 \text{ ist,}$$

vgl. den folgenden Paragraphen, wo das Resultat ohne Rechnung abgeleitet wird.

Aus den Elementen der Stereometrie ist bekannt, dafs die zweite Determinante oder $(1 - X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XYZ)$ die Form $4d^2$ das Quadrat des Sinus der Polar- (Supplementar-) Ecke ist und somit gleich $\sin^2\gamma \sin^2 X \sin^2 Y$, also $T = \frac{1}{\sin^2 \varkappa}$, $D(\alpha\beta'\gamma'')$ und die Bedingung $T = 0$ identisch mit

$$16) \qquad D(\alpha\beta'\gamma'') = 0.$$

Aufgabe 29. Die Bedingung, dafs die Geraden g und g′ sich schneiden, in ihren Konstanten $x', \alpha; x'', \alpha'$ auszudrücken.

Man setze $\xi$ für $x'' - x'$, dann ergiebt sich aus Formel 2 die gesuchte Relation, wenn man in Formel 16) $\alpha, \beta, \gamma$ der Reihe nach durch $\xi$, $\xi\nu$, $\xi\mu$, dann durch $\eta\nu$, $\eta$, $\eta\lambda$, zuletzt durch $\zeta\mu$, $\zeta\lambda$, $\zeta$ ersetzt und die Summe bildet.

Aufgabe 30. Verbindungsstrecken zweier Kreuzenden, welche symmetrisch zur kürzesten Verbindung liegen, sind gleich lang und bilden mit den Geraden symmetrisch gleiche Winkel, d. h. die gemeinsame Senkrechte vertritt bei Kreuzenden die Stelle des Schnittpunktes von Schneidenden.

[Seien $P' \{ u'$ und $Q' \{ v'$ die betreffenden Punkte, so liegen die Schnittpunkte des Abstandes $A \{ \xi$ und $B \{ \xi'$ in der Mitte von P und P′ bezw. Q und Q′. Nennen wir die $\lambda$ und $\lambda'$ der Aufgabe 22 entsprechenden Gröfsen L und L′, so ist $L = -\lambda$ und $L' = L'$. Aus den Gleichungen in Aufgabe 22 folgt:

$$n \cos (n g) = - n' \cos (n' g); \; n \cos (n g') = - n' \cos (n' g')$$

und aus der Formel für $K^2$ in Aufgabe 23, dafs $n^2 = n'^2$, und da n und n′ absolute Lösungen sind, $n = n'$, also $\cos (n g) = - \cos (n' g)$; $\cos (n g') = - \cos (n' g')$.]

Aufgabe 31. Ein Tetraeder ändert sein Volum nicht, wenn man zwei gegenüberliegende Kanten auf ihren Geraden beliebig verschiebt.

[Ist k der Abstand der sich kreuzenden Kanten ON und SS′ und w ihr Winkel, so folgt aus Formel 15)

$$V = \tfrac{1}{6} ON . SS' . k \sin w$$

(vgl. Baltzer, elem. Stereometrie 12 und Trig. 17).]

Aufgabe 32. (T) Die geraden Linien in $x^2 = y^2 = z^2$.

[Ihre Projektionen sind die Winkelhalbierenden der Achsenwinkel (vgl. S. S. VIII S. 44).]

Aufgabe 33. (T) Die Geraden in:

$$\frac{x^3+1}{x+1} = \frac{y^3+1}{y+1} = \frac{z^3+1}{z+1}.$$

Vier Gerade $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$; $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ etc.

Sind $\lambda \mu \nu$ gleich, so schliefsen je zwei denselben Winkel ein, sind sie gleich $90^0$, so ist dieser Winkel der Neigungswinkel des reg. Tetraeders.

Aufgabe 34. $\lambda = \mu = \nu = 60^0$, $g \{ x = y = -2z$; die Länge des Lots von $Q \{ 2, 2, -1$ (vgl. Aufgabe 20); es ist $r = 3$, $s = \frac{3}{2}$; $\cos \vartheta = 1$ d. h.?

Aufgabe 35. Wie 34, nur $g \{ x = y - 1 = -2z$.

$$r = \sqrt{5},\quad s = \frac{3}{2};\ \sin^2 \vartheta = \frac{59}{180};\ o = \frac{\sqrt{59}}{6}.$$

Aufgabe 36. Länge des Lots vom Punkt $Q \{ 1, 2, 3$ auf $g \{ x = y = z$, Achsen rechtwinklig. Gleichung des Lotes.

Aufgabe 37. Gleichung einer Geraden g, welche die Geraden $g_1 \{ x', \cos\alpha'$; $g_2 \{ x'', \cos\alpha''$ unter gegebenen Winkeln schneidet; System rechtwinklig.

Zur Bestimmung von $g \{ \alpha \ldots . \xi \ldots$ haben wir:

$$1) \qquad \cos v = \alpha\alpha' + \ldots,\ \cos w = \alpha\alpha'' + \ldots,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

d. h. also, die Richtungsfaktoren sind (zweideutig) bestimmt; da g sowohl $g_1$ als $g_2$ schneidet, so gilt nach Aufgabe 19

$$(\xi - x')(\beta\gamma' - \gamma\beta') + \ldots . = 0;\ (\xi - x'')(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + \ldots . = 0,$$

d. h. die Gerade ist die Schnittgerade zweier bestimmter Ebenen.

Aufgabe 38. Eine Gerade von bestimmter Richtung zu ziehen, welche zwei Kreuzende schneidet; beliebige Achsen.

Aufgabe 39. Gegeben zwei sich in $P \{ x_0 \ldots$ schneidende Geraden, g und h; die zu g symmetrische $\gamma$ durch P zu bestimmen.

Nach Aufgabe 17 ist, wenn $g \{ x_0, a \ldots$, $h \{ x_0, a'$; $\gamma \{ x_0, u \ldots$ wo die a etc. Richtungskoordinaten, $\lambda a = u + a', \ldots$ also $a' = \lambda a - u$; $1 = \varphi(u) = \lambda^2 - 2\lambda \cos w + 1$, $\lambda = 2 \cos w$; also

$$\gamma \left\{ \frac{x - x_0}{2 \cos w\, a - a'} = \frac{y - y_0}{2 \cos w\, b - b'} = \frac{z - z_0}{2 \cos w\, c - c'}. \right.$$

Aufgabe 40. Gegeben ein Quadrat im Raume, die Gleichung der Geraden, welche im Centrum auf allen vier Seiten senkrecht steht.

Aufgabe 41. Wie 40, nur statt des Quadrats ein reguläres Fünfeck.

Aufgabe 42. Ort der Mittelpunkte aller Verbindungsstrecken zweier kreuzender Geraden.

Die Geraden seien $g \{ P, a_1$ und $g' \{ Q, a_2$ und $P \{ x_p$; $Q \{ x_q$.

Bezeichnet man einen beliebigen Mittelpunkt mit X..., und die Mitte von PQ mit x... und X — x etc. mit X′, so ergiebt sich, wenn die Richtungsfaktoren von g und g′ mit $a_1$ bezw. $a_2$ bezeichnet werden, aus $\frac{\xi - x_p}{a_1} = .. \lambda$; $\frac{\xi' - x_q}{a_2} = \mu$ etc.

$$X' = \lambda a_1 + \mu a_2; \ldots$$

und daraus:

$$X' [b_1 c_2] + Y' [c_1 a_2] + Z' [a_1 b_2] = 0.$$

Der Ort ist also eine Ebene, welche durch die Mitte von PQ geht.

---

## § 10. Gerade und Ebene. Ebene und Gerade.

Es sei g eine Gerade, bestimmt durch einen ihrer Punkte A und ihre Richtungskoordinaten, und $\varepsilon$ eine Ebene, gegeben durch ihre Hesse'sche oder Normalform.

Aufgabe 1. Den Neigungswinkel zwischen g und $\varepsilon$ zu bestimmen.

Dieser Winkel i ist das Komplement des Winkels v zwischen g und der Normale n (§ 7) von O auf $\varepsilon$; sind deren Richtungswinkel (bezw. die Kosinus) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, und hat g die Richtungskoordinaten $a' b' c'$, so ist

$$\text{1)} \qquad \sin i = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$$

wenn g parallel $\varepsilon$, so ist $\sin i = 0$, also die Bedingung dafür

$$\text{2)} \qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0 = o'\alpha + p'\beta + q'\gamma.$$

Aufgabe 2. Zu zeigen, dafs die Ebene in Aufgabe 42 § 9 parallel $g_1$ und $g_2$ ist.

Aufgabe 3. Aus 1 durch Rechnung den Satz zu beweisen: Lote auf derselben Ebene sind parallel.

Es mufs $\sin i = 1$ sein, also $a'\varphi'(a) + \ldots = 1$, $a\varphi'(a') + \ldots = 1$ und nach Definition der Richtungskoordinaten $a\varphi'(a) + .. = 1$, $a'\varphi'(a') + .. = 1$. Sei $a = a' + \varepsilon$, $b = b' + \eta$, $c = c' + \zeta$, so ist, weil die $\varphi'$ homogenen Funktionen

ersten Grades sind, $a\varphi_\varepsilon'(\varepsilon\eta\zeta) + b\varphi_\eta'(\varepsilon\eta\zeta) + c\varphi_\zeta'(\varepsilon\eta\zeta) = 0$ und ebenso $a'\varphi_\varepsilon' + b'\varphi_\eta' + c'\varphi_\zeta' = 0$, also durch Subtraktion

$$\varepsilon\varphi_\varepsilon' + \eta\varphi_\eta' + \zeta\varphi_\zeta' = \varphi(\varepsilon\eta\zeta) = 0$$

also $\varepsilon, \eta, \zeta = 0$; also $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, also $a', b', c'$ konstant.

Aufgabe 4. Den Schnittpunkt von $g$ und $\varepsilon$ zu bestimmen, $g \{ x', a'$; $\varepsilon \{ \alpha, \beta, \gamma, n$.

Er sei $S \{ \xi, \eta, \zeta$, also haben wir, wenn $A \{ x', y', z'$

$$\frac{\xi - x'}{a'} = \frac{\eta - y'}{b'} = \frac{\zeta - z'}{c'}$$

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma - n = 0 = H(\xi, \eta, \zeta).$$

Setzt man wieder $\xi - x' = \lambda a', \ldots$, so hat man zur Bestimmung von $\lambda$

$$x'\alpha + y'\beta + z'\gamma - n + \lambda(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = 0$$
$$= H_A + \lambda \sin i$$

also $-\lambda = \dfrac{H_A}{\sin i}$ und

$$\xi = x' - \frac{H_A}{\sin i} a'; \text{ etc.} \tag{3}$$

Ist $\sin i = 0$, so werden $\xi, \eta, \zeta = \infty$, aufser wenn gleichzeitig $H_A = 0$, dann genügt jeder Punkt der Geraden $g$ der Gleichung der Ebene, die Gerade fällt ganz in die Ebene.

Aufgabe 5. Die Ebene durch die Strahlen

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}; \; \frac{x}{a''} = \text{etc.}$$

Die Bedingungen der Aufgabe 1 geben: $a'\alpha + \ldots = 0$; $a''\alpha + \ldots = 0$ und hieraus $\alpha : \beta : \gamma = [b'c''] : [c'a''] : [a'b'']$; da $n = 0$

$$x[b'c''] + y[c'a''] + z[a'b''] = 0. \tag{4}$$

Aufgabe 6. Unter welcher Bedingung liegen die Strahlen $a_1, a_2, a_3$ in einer Ebene?

Die Ebene ist $\varepsilon = x[b_1 c_2] + \ldots = 0$. Der Punkt $O$ des Strahls $a_3$ liegt in $\varepsilon$; liegt noch der unendlich ferne Punkt $\Omega$ von $a_3$, der $\{ \lambda a_3$ in $\varepsilon$, so liegt $a_3$ ganz in $\varepsilon$, also

$$a_3[b_1 c_2] + \ldots = 0. \tag{5}$$

Der mit Determinanten vertraute Leser hat die Bedingung in der Form

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche aussagt, dafs die drei homogenen Gleichungen:

$$x a_1 + \ldots = 0, \; x a_2 + \ldots = 0, \; x a_3 + \ldots = 0$$

eine und somit unendlich viele von $x = y = z = 0$ verschiedene Lösungen haben.

Aufgabe 7. Die Gleichung der Projektion der Geraden AB auf die Ebene $\varepsilon$.

$g \{ A, a'$, wo $A \} x'$, $B \} \xi$ sei der Schnittpunkt, bestimmt durch 3), C die Projektion von A auf $\varepsilon \{ \alpha$, n sei $\{ \xi'$, dann ist $BC \left\{ \frac{x - \xi}{\xi - \xi'} \right.$. Da $AC \{ x', \alpha$ bezw. $\{ x', a$ (wo a, b, c die zum Strahl $\alpha$ gehörigen Richtungskoordinaten), so ist nach 3) $\xi' = x' - H_A a$ und $\xi - \xi' = H_A \left( a - \frac{a'}{\sin i} \right)$.

Aufgabe 8. Durch Rechnung zu beweisen: Die Fufspunkte aller Geraden, welche vom selben Punkt A aufserhalb einer Ebene $\varepsilon$ unter gleicher Neigung gegen $\varepsilon$ gezogen sind, liegen auf einem Kreise.

$$\varphi (\xi' - \xi) = \varphi \left( \frac{H_A}{\sin i} (a' - a \sin i) \right)$$
$$= \frac{H_A^2}{\sin^2 i} \left( \varphi (a') + \sin^2 i \, \varphi (a) - 2 \sin^2 i \right) = H_A{}^2 \cot^2 i.$$

Aufgabe 9. Den Winkel $\nu$ zu bestimmen, welchen g mit einer beliebigen Gerade h in der Ebene $\varepsilon$ einschliefst.

Wir können h durch B der Aufgabe 7 legen, die Kosinus ihrer Richtungswinkel seien u, v, w, dann ist nach Aufgabe 1, wenn $a = \varphi_\alpha$ etc.: $u a + v b + w c = 0$;

$$\cos \nu = \frac{u \left( \frac{a'}{\sin i} - a \right) + \ldots}{\sqrt{\varphi \left( \frac{a'}{\sin i} - a \right)}} = \frac{u a' + \ldots}{\sin i \sqrt{\phantom{x}}} = \frac{\cos (g h)}{\sin i \sqrt{\phantom{x}}}$$

$\varphi (s - r) = \varphi (s) + \varphi (r) - 2 \varphi' (s r)$, vgl. S. S. VIII § 21 Gleichung 5, also

$$6)\ \cos\nu = \frac{\cos(gh)}{\cos i};\quad \cos(gh) = \cos i\ \cos\nu.$$

Der Winkel $\nu$ heifst das Azimut der Geraden h, und wir haben hier in 6) rein analytisch-geometrisch den Pythagoras im Raum abgeleitet.

Aufgabe 10. Unter allen Winkeln, welche eine Gerade mit Richtungen einer Ebene einschliefst, ist der spitze Neigungswinkel der kleinste.

---

## § 11. Ebene und Ebene.

Es seien $\varepsilon\{\alpha, n$ (Abkürzung für $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - n = 0$) und $\varepsilon'\{\alpha', n'$ zwei Ebenen ($\alpha$.. stehen zugleich für $\cos\alpha$..) und die zu $\alpha, \alpha'$.. gehörigen Richtungskoordinaten der Normalen n, n' werden mit a, .. a' .. bezeichnet.

Aufgabe 1. Der Neigungswinkel von $\varepsilon$ und $\varepsilon'$.

Da er gleich dem Winkel zwischen den Normalen, so haben wir

$$7)\quad \cos w = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'$$

und als Bedingung, dafs die Ebenen auf einander senkrecht stehen,

$$8)\quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0$$

und als Bedingung, dafs die Ebenen parallel, d. h. den Winkel 0 bezw. 180° einschliefsen, ganz wie in Aufgabe 3 § 10 rechnend,

$$9)\qquad \alpha = \alpha';\ \beta = \beta';\ \gamma = \gamma'.$$

Sind $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ in allgemeiner Form $U\{a, d$ gegeben, so gehen 8) und 9) über in

$$8a)\quad aa' + \ldots = 0;\qquad 9a)\quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Aufgabe 2. Den Sinus des Neigungswinkels zweier Ebenen bezw. zweier Geraden zu bestimmen.

Wir benutzen das System wie in Aufgabe 3 § 10.

$$1)\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 1 \qquad 2)\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \cos w$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = 1;\qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \cos w.$$

Wir multiplizieren die Gleichungen 1) und die Gleichungen 2) und erhalten die merkwürdige Formel

$$10)\quad [b\,c'][\beta\gamma'] + [c\,a'][\gamma\alpha'] + [a\,b'][\alpha\beta'] = \sin^2 w,$$
$$\alpha = \varphi'(a)\ldots \quad a = F'(\alpha)\sin^2\varkappa\ldots$$

wo $\varphi'(a)$ wie in S. S. VIII S. 85 die halbe Ableitung der homogenen Form 2. Grades $\varphi$ nach a bedeutet, und $F'(\alpha)$ die entsprechende Bedeutung für die adjungierte Form hat; wenn wir $[\beta\gamma']\ldots$ mit u, v, w und $[b\,c']\ldots$ mit x, y, z bezeichnen, so ist $u = F'(x)$, $v = F'(y)$, $w = F'(z)$ und umgekehrt $x \sin^2\varkappa = \varphi_a'(u, v, w)$, somit

$$11)\quad \sin^2 w = F(x, y, z) = \varphi(u, v, w) : \sin^2\varkappa,$$

wo $\sin^2\varkappa$ die bekannte Bedeutung hat des Sinus der Koordinatenecke. Aus 11) folgt unmittelbar als Bedingung des Parallelismus

$$x = y = z = 0, \; u = v = w = 0.$$

Aufgabe 3. Die Schnittgerade s zweier Ebenen zu bestimmen. Da s in beiden Ebenen liegt, so haben wir nach Aufgabe 6 § 10, wenn die Richtungskoordinaten mit A, B, C bezeichnet werden

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0; \quad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0$$

und hieraus:

$$A = \sigma^{-1}u, \quad B = \sigma^{-1}v, \quad C = \sigma^{-1}w,$$

wo u.. die Bedeutung wie in Aufgabe 2 habe und $\sigma^2$ nach Aufgabe 7 § 9 gleich $\varphi(u, v, w)$, somit $\sigma^2 = \sin^2\varkappa \sin^2 w$ und die Richtungskoordinaten der gesuchten Geraden

$$12)\quad A = \frac{[\beta\gamma']}{\sin\varkappa\,\sin w};\; B = \frac{[\gamma\alpha']}{\sin\varkappa\,\sin w};\; C = \frac{[\alpha\beta']}{\sin\varkappa\,\sin w}.$$

Um die Gleichung der Geraden zu erhalten, bestimmt man am einfachsten den Punkt, in dem die Gerade eine der Koordinatenebenen, z. B. die y-Ebene schneidet; für diesen Punkt $x_y, z_y, y_y = 0$ ist

$$x_y = \frac{[\gamma\,n']}{[\gamma\alpha']};\; y_y = 0;\; z_y = \frac{[n\,\alpha']}{[\gamma\alpha']}.$$

Aufgabe 4. Die Gerade zu bestimmen, welche auf zwei Geraden g und g' senkrecht steht, und den kürzesten Abstand zu finden. Vgl. Aufgabe 22 § 9.

Da die Gerade s in Aufgabe 3 auf den Normalen von $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ senkrecht steht, so haben wir, wenn $g\,\{x', \alpha, \beta, \gamma$ und $g'\,\{x'', \alpha', \beta', \gamma'$ die beiden Geraden sind, dieselbe Gleichung zur Bestimmung von A, B, C wie in Aufgabe 3 und erhalten dasselbe Resultat, nur bedeutet w den Winkel zwischen g und g'. Da k der Abstand der beiden parallelen Ebenen ist, welche wir durch g ∥ g' und durch g' parallel zu g legen können, so ist (k = d):

$$d = (x_2 - x_1)\,\varphi'(A) + \ldots$$
$$d \sin w = \sin \varkappa\,(x_2 - x_1)\,[b\,c'] + \ldots$$

Die Formel ist insofern noch allgemeiner als die frühere, als die Punkte $x_2, \ldots$ und $x_1$ nur in je einer der beiden parallelen Ebenen zu liegen brauchen.

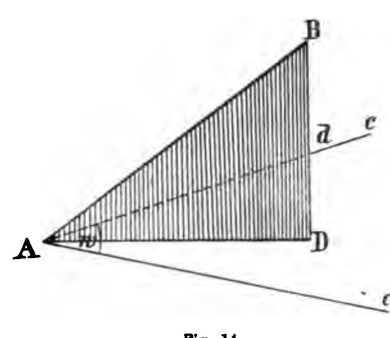


Fig. 14.

Auch die Formel 15) des § 9 ergiebt sich ohne weiteres aus dem doppelten Ausdruck des Tetraeders V (Fig. 14). Sind Ac, Ac' zwei Parallelen zu g und g' in einer der Ebenen, so ist, wenn Ac und Ac' gleich 1 und AB gleich n, wo also n eine beliebige Verbindungsstrecke zweier Punkte je einer der beiden parallelen Ebenen, b V = n sin E = d sin w. Auch die Lösung von Aufgabe 42 ist ohne weiteres da; ebenso gilt der Satz in Aufgabe 27 § 9 mit der Erweiterung auf eine beliebige Verbindungsstrecke beider Ebenen. Grund: Jede Verbindungsstrecke läfst sich ohne Änderung der Richtung und Gröfse so verschieben, dafs sie beide kreuzende Geraden schneidet.

Aufgabe 4a. Durch geometrische Konstruktion eine beliebige Verbindungsstrecke der beiden durch zwei Kreuzende bestimmten Parallelebenen so zu verschieben, dafs sie beide Kreuzende schneidet.

[Man verschiebe die Gerade parallel, bis sie g in A

schneidet und die Ebene durch $g'$ in B, ziehe durch B die Parallele zu g, welche $g'$ in C schneidet.]

Ebenso erhalten wir ohne weiteres die Bedingung dafür, dafs zwei Gerade sich schneiden, wieder mit der angegebenen Erweiterung.

$$13)\qquad (x_2 - x_1)\,[b\,c') + \ldots = 0,$$

in der die Richtungskoordinaten durch beliebige Richtungsfaktoren ersetzt werden können.

Die Gleichung 13) ist sicher erfüllt, wenn wir $(x_2 - x_1) = \lambda a'$ oder $= \lambda a$ setzen; da dies bedeutet, dafs Punkt $x_1$ auf $g'$ bezw. Punkt $x_2$ auf g liegt; es ist daher identisch

$$13a)\qquad a\,[b\,c'] + \ldots = 0;\; a'\,[b\,c'] + \ldots = 0$$

und dieser Haupt-Determinantensatz somit geometrisch erwiesen.

Auch die Aufgabe 38 § 9 erhält hier sofort ihre Lösung; ist $\xi, \eta, \zeta$ ein Punkt der Geraden l von bestimmter Richtung o, p, q, welche g und $g'$ schneidet, so sind nach 13) ihre Gleichungen:

$$14)\quad (\xi - x_1)\,[b\,q] + \ldots = 0;\; (\xi - x_2)\,[b'q] + \ldots = 0.$$

Da 14) die Gerade l als Schnitt zweier Ebenen in der Form U darstellen, so entsteht

Aufgabe 5. Die Schnittgerade S der Ebenen $U_1 = 0$; $U_2 = 0$ in der gewöhnlichen Form darzustellen.

Wir wählen eine von Aufgabe 3 abweichende Methode, die, im Prinzip einfacher, etwas mehr Rechnung verursacht. Sind $x_1$; $x_2$; $x_3$ drei Punkte einer Geraden, so kann man ihrer Gleichung die Form geben:

$$15)\qquad \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_1 - y_3} = \frac{z - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Wir wählen als die drei Punkte diejenigen, in denen die beiden Ebenen $U_1 = a\,x + \ldots = 0$; $U_2 = a'\,x + \ldots = 0$; gemeinsam die Koordinatenebenen schneiden, und erhalten nach leichter Umformung

$$16)\quad \left(x - \frac{[d\,c']}{[c\,a']}\right) : [b\,c'] = y : [c\,a'] = \left(z - \frac{[d'a]}{[c\,a']}\right) : [a\,b'].$$

Beispiel: Die Schnittgerade der Ebenen $x = ay + b$; $z = cy + d$.

Aufgabe 6. Die Gleichung einer Ebene durch $g \{ x_1, a$.

[Die erste Gleichung 14), wenn darin $\xi \eta \zeta$ als variabel angesehen werden, denn diese Ebene enthält den Punkt $x_1$ und wenn x irgend ein zweiter Punkt von g, so ist $x - x_1 = \lambda a$ und damit nach 13a) die Gleichung auch von x erfüllt.]

Aufgabe 7. Die Ebene durch $A \{ x_a$ und die Gerade $g \{ x_1, a$.

Man kann die Gerade, welche A mit dem Punkt $x_1$ verbindet, als die Gerade l von Aufgabe 38 § 9 bezw. Formel 14) ansehen, dann sind o, p, q proportional $x_a - x_1$ etc. und man erhält:

$$17) \qquad (x - x_1)[b(z_a - z_1)] + \ldots = 0.$$

Ist g eine der Achsen, z. B. die y-Achse, so ist für sie $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, und für $x_1$ kann man den Nullpunkt wählen, also alle 3 gleich Null setzen und hat somit als Gleichung der Ebene durch einen Punkt A und die y-Achse:

$$17a) \qquad z x_a - x z_a = [x_a z] = 0$$

bei beliebigem Achsensystem.

Ist g durch einen zweiten Punkt $x_2$ gegeben, so sind a etc. proportional $x_2 - x_1$ etc. und man hat, wenn $\xi, \eta, \zeta$ die laufenden Koordinaten bezeichnen

$$18) \quad (\xi - x_1)[(y_2 - y_1)(z_3 - z_1)] + \ldots = 0$$

als Gleichung der Ebene, welche durch drei gegebene Punkte bestimmt ist (und die Eliminination in § 9 S. 42 ist ohne Rechnung vollzogen).

Aufgabe 8. Die Ebenen durch die parallelen Geraden $g \{ x_1, o;\ g' \{ x_2, o$ entweder als Spezialfall von Aufgabe 7, indem $A \{ x_2$ gesetzt wird, oder als Spezialfall von Gleichung 18, indem $x_3$ als der in der Richtung o, p, q unendlich ferne Punkt gesetzt wird, also $z_3 - z_1 = \lambda q$.

Aufgabe 9. Die Ebene, welche durch die sich schneidenden Geraden $g \{ x_1, 0;\ g' \{ x_1, 0';$ gelegt ist.

$$14a) \qquad (\xi - x_1)[p q'] + \ldots = 0.$$

Aufgabe 10. Die Ebene, welche durch g zur Ebene $\varepsilon \{ ax + \ldots + d = 0$ senkrecht ist.

Die Gleichung der von einem Punkt $x_1$ auf g senkrecht zur Ebenen $\varepsilon$ gezogenen Geraden ist als Parallelen zur Normale n von $\varepsilon$:

$$\frac{x - x_1}{F'(a)} = \frac{y - y_1}{F'(b)} = \frac{z - z_1}{F'(c)},$$

wo die Bedeutung von $F'(a)$ etc. in Aufgabe 2 erklärt ist, und somit die gesuchte Ebene durch 14) bestimmt.

Aufgabe 11. Die Schnittgerade der Ebenen

$$ax + by + cz = 0; \quad x + y + z = 0.$$

Aufgabe 12. Die Ebene durch $g\left\{\frac{x}{b - c} = \frac{y}{c - a}\right.$ $= \frac{z}{a - b}$ und den Punkt $a, -b, b - a$; die Ebene durch g und den Punkt $1, n + n^2; \frac{n^3 - 1}{1 - n}$.

Aufgabe 13. Der Winkel zwischen den Ebenen $x + y - z = 0$ und $x - y + z = 0$? wenn $\lambda = \mu = \nu = 90^0$, (Neigungswinkel des regulären Oktaeders).

Aufgabe 14. Der Winkel zwischen den Ebenen $x + y + z = 0$; $x + y - 2z = 0$?

Aufgabe 15. Die Gleichung der Ebene, welche den Winkel zwischen zwei gegebenen Geraden durch 0 halbiert und auf ihrer Ebene senkrecht steht.

Die Aufgabe ist ein Spezialfall von Aufgabe 10. Die betreffende Gerade geht durch die Gerade $b\{0, a \mp a'$ [vgl. Aufgabe 17 § 9] und steht auf der Ebene der beiden Geraden senkrecht, also enthält sie die Gerade

$$\frac{x}{F'([bc'])} = \frac{y}{F'([ca'])} = \frac{z}{F'([ab'])},$$ d. h. nach Aufgabe 2

$$\frac{x}{[\beta\gamma']} = \text{etc.}$$

Ihre Gleichung ist nach 14), da $x_1' = 0$

$$x[(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)(c \mp c') - (\alpha\beta' - \beta\alpha')(b \mp b')] + \ldots = 0$$

und mit Benutzung von $\alpha a + \ldots = 1$; $\alpha' a' + \ldots = 1$; $\alpha a' + \ldots = \alpha' a + \ldots = \cos\varphi$, wenn man $1 - \cos\varphi$ heraushebt

$$\text{18a)} \quad x(\alpha \mp \alpha') + y(\beta \mp \beta') + z(\gamma \mp \gamma') = 0.$$

Aufgabe 16. Durch Rechnung zu verifizieren, dafs die beiden Ebenen sub 18) aufeinander senkrecht stehen.

Wegen der Homogenität der Gleichung 8) kann man gemeinsame Faktoren weglassen und z. B. $\alpha - \alpha' \ldots$ als die Richtungskosinus der einen Ebene, $\alpha + \alpha'$ als die der andern $\alpha''$ ansehen; dann ist $\alpha'' \{ f (\alpha + \alpha') \{ a + a'$ und $(\alpha - \alpha')(a + a') + \ldots = \alpha a + \ldots - (\alpha' a' + \ldots) = 1 - 1 = 0$.

Aufgabe 17. Die Gleichung der Ebene durch 0, welche mit den Achsen gleiche Winkel bildet (symmetrisch liegt).

Da für die Achsen wie auch $\lambda \mu \nu$ seien, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, so ist $\alpha = \beta = \gamma = ?$ und die gesuchte Ebene

$$x + y + z = 0.$$

Aufgabe 18. Die Gleichung der Ebene durch 0, welche mit drei Strahlen gleiche Winkel bildet, welche selbst untereinander gleiche Winkel bilden.

Die Aufgabe ist im wesentlichen: die Gleichung eines Strahles zu finden, welche mit den drei Achsen, welche gleiche Winkel bilden, gleiche Winkel bildet. Da $\alpha = \beta = \gamma$, so reduziert sich $F(\alpha\beta\gamma) = \sin^2 h$ auf $\alpha^2 . 3 (1 - \lambda)^2 = 1 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3$, also $\alpha^2 = \frac{1 + 2\lambda}{3} = \beta^2$; die Gleichung der Ebene wird bestimmt durch $\alpha x_1 + \ldots = p$, wo $p^2 = \frac{1 + 2 \cos\varphi}{3}$, $\alpha x_2 + \ldots = p$, $\alpha x_3 + \ldots = p$, und wenn die Ebene durch 0 geht $\alpha \{ [(y_2 - y_1)(z_3 - z_1)]$ etc.

Aufgabe 19. $\lambda = \mu = \nu = 90^0$. Die Gleichung der Ebene, welche von der Hauptdiagonale eines Würfels, dessen eines Dreikant die Koordinatenecke ist, während die Gegenecke die Koordinaten $+a$, $+a$, $+a$ hat, ein Drittel abschneidet und auf der Diagonale senkrecht steht; in welchen Linien schneidet die Ebene die Koordinatenebenen?

Resultat: $x + y + z = a$.

Aufgabe 20. Analytisch zu verifizieren, dafs jede Gerade die mit einer Ebene, d. i. eine Fläche ersten Grades (eine $F^1$ nach Reye), zwei Punkte gemein hat, alle Punkte mit ihr gemein hat.

Beliebiger Punkt: $x_1 + \lambda x_2 \ldots$

**Aufgabe 21.** Ebene, welche zwei verschiedene Richtungen enthält, nach Aufgabe 1 $\alpha\, o' + \ldots = 0$; $\alpha\, o'' + \ldots = 0$; $\alpha$ proportional $[p'\, q''] \ldots$

**Aufgabe 22.** Bedingung dafür, dafs drei sich Kreuzende der Richtung nach in einer Ebene liegen.

Aus 1 folgt $\frac{[o\, p']}{[o\, p'']} = \frac{[p\, q']}{[p\, q'']} = \frac{[q\, o']}{[q\, o'']}$, und dies ist identisch mit $o\, [p'\, q''] + \ldots = 0$, was direkt Aufgabe 5 ergiebt.

**Aufgabe 23.** Durch Rechnung zu beweisen: Zwei Ebenen stimmen entweder in einer Richtung, der Richtung ihrer Schnittgeraden, überein oder in allen Richtungen.

Die gemeinsame Richtung sei o, p, q, dann ist nach 14)

$$\alpha = [b\, q];\ \ \alpha' = [b'\, q];\ \ \beta = [c\, o];\ \ \beta' = [c'\, o];$$
$$\gamma = [a\, p];\ \ \gamma' = [a'\, p],$$

also für die Schnittgerade, welche $\}$ $[\beta\, \gamma']$ etc.:

$$[\beta\, \gamma'] = o\, f;\ \ [\gamma\, \alpha'] = p\, f;\ \ [\alpha\, \beta'] = q\, f,$$

also die Schnittgerade $\{$ o, p, q; aufser wenn $f = 0$. f ist aber $= o\, [b\, c'] + p\, [c\, a'] + q\, [a\, b']$ und $f = 0$ ist geometrisch identisch mit der Bedingung, dafs die Strahlen o, a, a′ in eine Ebene und analytisch mit dem Gleichungssystem

$$\frac{[b\, q]}{[b'\, q]} = \frac{[c\, o]}{[c'\, o]} = \frac{[a\, p]}{[a'\, p]} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

d. h. mit dem Parallelismus der Ebenen.

**Aufgabe 24.** Die Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittgerade der Ebenen $\varepsilon \{ \alpha, n$ und $\varepsilon' \{ \alpha', n'$ hindurchgeht.

Aufgabe 6 in Verbindung mit Aufgabe 3 bezw. Formel 14) und 12) geben, wenn a, b, c beliebig,

$$\left(x - \frac{[\gamma\, n']}{[\gamma\, \alpha']}\right) [b\, q] + y\, [c\, o] + \left(z - \frac{[n\, \alpha']}{[\gamma\, \alpha']}\right) [a\, p] = 0$$

wo $o = [\beta\, \gamma']$; $p = [\gamma\, \alpha']$; $q = [\alpha\, \beta']$.

Die Rechnung ergiebt $[b\, q] = \alpha\, \tau' - \alpha'\, \tau$ wo $\tau' = a\, \alpha' + b\, \beta' + c\, \gamma'$; $\tau = a\, \alpha + b\, \beta + c\, \gamma$, und aus Symmetrie sofort $[c\, o] = \beta\, \tau' - \beta'\, \tau$; $[a\, p] = \gamma\, \tau' - \gamma'\, \tau$; also das konstante Glied ist $-N$, wo

$$[\gamma\alpha'] \, N = [\gamma n'] (\alpha\tau' - \alpha'\tau) + [n\alpha'] (\gamma\tau' - \gamma'\tau)$$
$$= n [\gamma\alpha'] \tau' - n' [\gamma\alpha'] \tau,$$

also $N = n\tau' - n\tau$ und die gesuchte Gleichung

$$19) \qquad H = \tau'\varepsilon - \tau\varepsilon' = 0 \; \{ \; \varepsilon - \sigma\varepsilon' - 0$$

wo $\sigma$ eine beliebige Konstante. Dafs jeder Punkt der Schnittlinie, für den also $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ gleichzeitig verschwinden, der Gleichung 19) genügt, ist unmittelbar zu sehen.

Aufgabe 25. Die Gleichung der Halbierungsebenen des Winkels zweier Ebenen.

Gleichung 7) giebt, da $\cos w = \pm \cos w'$, $\tau' = \pm \tau$, aufser wenn $a\alpha' + \ldots = \alpha a' + \ldots = \pm 1$, d. h. die Ebenen parallel, also

$$19a) \qquad H = \varepsilon \mp \varepsilon' = 0.$$

Aufgabe 26. Den Schnitpunkt dreier Ebenen $\varepsilon \, \{ \, \alpha \ldots n$, $\varepsilon' = \alpha' \ldots n'$, $\varepsilon'' = \alpha'' \ldots n''$ zu bestimmen.

Auflösung dreier Gleichungen ersten Grades. Resultat vgl. Aufgabe 3

$$x_3 = [n\beta'\gamma''] : [\alpha\beta'\gamma''] \text{ etc.}$$

Aufgabe 27. Bedingung, dafs vier Ebenen $\alpha \ldots \alpha'''$ sich in einem Punkt schneiden.

$$[\alpha\beta'\gamma''n'''] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & n \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & n' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & n'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & n''' \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 28. Die Bedingung dafür, dafs vier Punkte $x_1 \ldots$ bis $x_4$ in einer Ebene liegen.

Auflösung der vier homogenen Gleichungen

$$x_k\alpha + y_k\beta + z_k\gamma - n\,t_k = 0$$

wo $t_k$ eine Hilfsvariable, die gleich 1 gesetzt werden kann, also

$$D\,(1\,2\,3\,4) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man einen der Punkte, z. B. $x_1$, zum Anfangspunkt des parallel verschobenen Koordinatensystem macht,

erkennt man, dafs $\left|\frac{1}{6}\sin\varkappa\, D\right|$ das Volumen des durch die vier Punkte bestimmten Tetraeders ist (vgl. Aufgabe 26 § 9).

Aufgabe 29. Die Schnittgeraden der Ebenen

$$ax - y + bz;\quad x - ay + cz;\quad za - cy + bx;$$

wenn $a^2(1 - c^2) - a(b^2 + 1) + 2bc = 0$.

Aufgabe 30. Der Ort der Mittelpunkte der Verbindungsstrecken zweier Kreuzenden, welche ein und derselben Ebene parallel sind, ist eine Gerade (T). Vgl. Aufgabe 42 § 9.

Aufgabe 31. (T) Wenn die drei Ebenen $x = ay + bz$; $y = az + cx$; $z = bx + ay$ sich in einer Geraden schneiden, so ist die Gleichung dieser Geraden

$$\frac{x}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

## III. Abschnitt.

# Der lineare Komplex.

---

### § 12. Die gerade Linie in Linienkoordinaten.

Setzt man in 17) für A den Nullpunkt ein, so erhält man

$$1)\qquad (x - x_1)\,[y_1\,c] + \ldots = 0.$$

Die Gröfsen: $(y_1\,c - z_1\,b)$; $(z_1\,a - x_1\,c)$; $(x_1\,b - y_1\,a)$ sind also den Richtungskosinus der Ebene O g proportional.

Legt man durch g eine Ebene, welche einer der Achsen, z. B. x parallel ist, so ist — (cf. § 11 Aufgabe 7) $o = 1$, $p = 0$, $q = 0$ und Aufgabe 21 § 11 bezw. Formel 14 § 11 giebt: $(y - y_1)\,c - (z - z_1)\,b = 0$ oder $y\,c - z\,b = y_1\,c - z_1 b = [y_1\,c] = A$.

Kombiniert man diese Gleichung mit der Gleichung $x = 0$, so stellt sie die Gerade dar, in welcher die Parallelebene durch g zur x-Achse die x-Ebene schneidet, d. h. die Projektion der Geraden auf die x-Ebene.

Wir haben also als Gleichungen der drei Projektionsebenen das System:

$$2)\qquad [y\,c] = A;\ [z\,a] = B;\ [x\,b] = C,$$

worin a, b, c die drei Richtungskoordinaten oder auch drei zusammengehörige Richtungsfaktoren der Geraden g sind, und A, B, C den Richtungskosinus der Ebene O g proportionale Zahlen sind. Durch zwei von diesen Gleichungen ist die dritte bestimmt, da identisch:

$$3)\qquad a\,A + b\,B + c\,C = 0,$$

was a priori klar, da 3) nur ausdrückt, dafs die Richtung der Geraden g in der Ebene O g enthalten ist.

Die sechs Gröfsen a ... A ..., zwischen denen 3) besteht, bestimmen die Gerade g, es sind daher Koordinaten von g, sie heifsen Plücker'sche Koordinaten der Linie oder kurz Linienkoordinaten, sie empfehlen sich durch die Allgemeinheit ihrer geometrischen Bedeutung.

Da die Ebenen 2) durch Multiplikation der Gleichungen 2) mit einem beliebigen Faktor sich nicht ändern, so hängt die Lage der Geraden nur von den Verhältnissen der Gröfsen ab, z. B. $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, und da zwischen diesen fünf Gröfsen noch die durch a dividierte Gleichung 3) besteht, so sind nur vier von ihnen beliebig, und wir haben im Raum eine $\infty^4$fache Schar von Geraden.

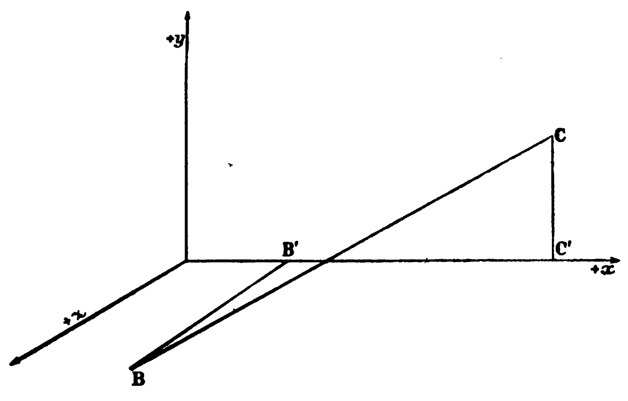



Fig. 15.

Aufgabe 1. Die Gerade ist in Linienkoordinaten gegeben, die Koordinaten von zwei ihrer Punkte durch diese auszudrücken.

Die Gerade schneide die z-Ebene in C, so ist C ein Punkt der Projektion von g auf die z-Ebene und gehört zu $x = - B : c$, wie aus der zweiten Gleichung 2) folgt bezw. aus der Fig. 15, denn wenn die Gerade g die y-Ebene in B schneidet und man BC durch Parallele zu den betreffenden Achsen in B'C' auf die x-Achse projiziert, so ist C' der Punkt, in welchem die Projektion von g auf die y-Ebene die x-Achse schneidet, und B' der Punkt, in welchem die

Projektion von g auf die z-Ebene die x-Achse schneidet, also $OB' = C : b$ und

$$C\left\{\frac{-B}{c};\ \frac{Bb + Cc}{-ac}\ \text{oder}\ \frac{A}{c};\ 0;\quad B\left\{\frac{C}{b};\ 0;\ \frac{-A}{b}.\right.\right.$$

Für den Punkt A, in dem g die x-Ebene schneidet, ist

$$A\left\{0;\ -\frac{C}{a};\ \frac{B}{a}.\right.$$

Der Zusammenhang zwischen den Plücker'schen Koordinaten und der Bestimmung einer Geraden durch einen Punkt und ihre Richtungsfaktoren kommt bereits in der Definition der Linienkoordinaten zum Ausdruck.

Aufgabe 2. Die Gerade ist durch zwei Punkte 1 und 2 gegeben, ihre Linienkoordinaten?

Da $a \{ x_2 - x_1$, so ist

$$4)\quad \frac{a}{x_2 - x_1} = \frac{b}{y_2 - y_1} = \frac{c}{z_2 - z_1} = \frac{A}{[y_1 z_2]} = \frac{B}{[z_1 x_2]} = \frac{C}{[x_1 y_2]}.$$

Aufgabe 3. Die Bedingung, dafs zwei Gerade a, A und a', A' sich schneiden, in Linienkoordinaten auszudrücken.

Unmittelbar aus 4) giebt § 9 Aufgabe 19, wenn man den Schnittpunkt als $x_2$ wählt

$$5)\quad aA' + bB' + cC' + Aa' + Bb' + Cc' = 0 = \Sigma a_k b_{3+k};$$

letzteres, wenn die Koordinaten von g mit $a_1$ bis $a_6$ und die von g' mit $b_1$ bis $b_6$ bezeichnet werden und $b_{6+k} \equiv b_k$ ist.

Aufgabe 4. Der Bedingung 5) die Form zu geben:

$$5a)\quad (a + a')(A + A') + (b + b')(B + B') + (c + c')(C + C') = 0.$$

Aufgabe 4a. Die Bedingung 5 direkt aus den Gleichungen 2) der Geraden in Linienkoordinaten herzuleiten.

Aufgabe 5. Die Bedingung 5 bezw. 5a in Einklang zu bringen mit § 11 Aufgabe 24.

Aus der Form 5a ersieht man, dafs, wenn $x_1, x_2$ zwei Punkte auf g und $x_1', x_2'$ zwei Punkte auf g', die Form 5a,

von einem konstanten Faktor abgesehen, das Volumen des Tetraeders der vier Punkte darstellt.

Aufgabe 6. Durch Rechnung zu zeigen, dafs die Linienkoordinaten, von einem konstanten Faktor abgesehen, sich nicht ändern, wenn man die beliebigen Punkte 1 und 2 der Aufgabe 2 durch zwei andere, 3 und 4, auf g ersetzt.

$$x_3 = \frac{x_1 + \sigma x_2}{1 + \sigma}; \quad x_4 = \frac{x_1 + \tau x_2}{1 + \tau}.$$

Aufgabe 7. Die gerade Linie kann ebenso gut wie man sie als Verbindung zweier Punkte ansieht, auch als Schnitt zweier Ebenen $u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1 = 0$ und $u_2 x$.. angesehen werden; es sollen die Linienkoordinaten durch die Koordinaten u etc. der Ebenen bestimmt werden.

Man wählt die beiden Punkte $x_1$, $x_2$ von Aufgabe 2 in der Schnittlinie, dann wird das Liegen beider Punkte in beiden Ebenen ausgedrückt durch die vier Gleichungen 1) $u_1 x_1 + \ldots = 0$; 2) $u_1 x_2 + \ldots = 0$; 3) $u_2 x_1 + \ldots = 0$; 4) $u_2 x_2 + \ldots = 0$. Subtrahiert man 2 und 1, 3 und 4, so folgt

$$\text{I)} \qquad \frac{x_2 - x_1}{[v_1 w_2]} = \frac{y_2 - y_1}{[w_1 u_2]} = \frac{z_2 - z_1}{[u_1 v_2]} = \lambda.$$

Subtrahiert man 3 und 1, 4 und 2, so erhält man

$$\text{II)} \qquad \frac{u_2 - u_1}{[y_1 z_2]} = \frac{v_2 - v_1}{[z_1 x_2]} = \frac{w_2 - w_1}{[x_1 y_2]} = \mu.$$

Man überzeugt sich leicht, dafs $\lambda \mu + 1 = 0$ ist, denn

$$\begin{aligned}[y_1 z_2] = [y_1 (z_2 - z_1)] &= \lambda ([u_1 v_2] y_1 - [w_1 u_2] z_1) \\ &= \lambda (u_1 (v_2 y_1 + w_2 z_1) - u_2 (v_1 y_1 + w_1 z_1)\end{aligned}$$

und mit Benutzung von Gleichung 1) und 2) der Aufgabe:

$$[y_1 z_2] = \lambda (u_1 (-u_2 x_1 + 1) - u_2 (-u_1 x_1 + 1)) = \lambda (u_1 - u_2)$$

somit

$$\lambda \mu + 1 = 0.$$

Nennt man also die den Punkt-Linienkoordinaten $x_2 - x_1$; $[y_1 z_2]$ entsprechenden Ebenen-Linienkoordinaten $u_2 - u_1$; $[v_1 w_2]$ etwa $a'$, $A'$, so findet eine merkwürdige Umkehrung statt, insofern die kleinen Ebenenkoordinaten gleich den grofsen Linienkoordinaten und die grofsen den drei kleinen

mit umgekehrten Vorzeichen gleich sind. Hierbei ist von dem unwesentlichen konstanten Faktor $\mu$ abgesehen.

Aufgabe 7a. Die Bedingungen anzugeben dafür, dafs eine durch ihre Linienkoordinaten a, A gegebene Gerade g in einer durch ihre Achsenkoordinaten gegebenen Ebene $\varepsilon$ liegt. Die Aufgabe kann entweder auf Aufgabe 1 zurückgeführt werden, da die Punkte A, B, C derselben in $\varepsilon$ liegen müssen, oder direkt mittelst Aufgabe 7 gelöst werden, indem man $u_1 = u$ setzt, $u_2 = \lambda A + u$; $v_2 = \lambda B + v$; $u_1 v_2 - v_1 u_2 = \lambda (Bu - Av) c - \lambda c$, also

III) $Av - Bu = c$; $Bw - Cv = a$; $Cu - Aw = b$.

Dies System III zieht die Gleichungen:

$$au + bv + cw = 0 \text{ und } aA + bB + cC = 0$$

identisch nach sich; deren erste aussagt, dafs der unendlich ferne Punkt von g (bezw. jeder ihrer Parallelen) in $\varepsilon$ liegt, deren zweite schon sub 3) gedeutet ist.

Wir haben also zwischen den 5 Verhältnissen von a, A drei Gleichungen, und es bleiben zwei unbestimmt, woraus die bekannte Thatsache folgt, dafs die Ebene eine zweifach unendliche Schar von Geraden enthält.

Aufgabe 8. Den Winkel zweier Geraden durch ihre Linienkoordinaten zu bestimmen.

Nach § 9 Formel 10:

$$\frac{a\varphi'(a') + b\varphi'(b') + c\varphi'(c')}{\sqrt{\varphi(a, b, c,)}\ \sqrt{\varphi(a', b', c')}} = \cos\varphi.$$

Aufgabe 9. Den Abstand zweier Geraden zu bestimmen.

Da die Gröfse T aus S. 51 dem Ausdruck $S = aA' + \ldots Aa'$ proportional ist, so erhalten wir

$$k \sin v = \frac{\sin \varkappa\ S}{\sqrt{\varphi(a, b, c)\ \varphi(a', b', c)}} = \frac{\sin \varkappa\ S}{m}.$$

Der Nenner fällt weg, wenn a, a′ die Richtungskoordinaten sind. Die Gröfse k sin v heifst oft: Moment der Geraden gegen einander.

Aufgabe 10. Die Momente einer Geraden gegen die Achsen in Linienkoordinaten zu bestimmen.

Die Koordinaten der Achse x sind $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = 0$, $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$, also $k \sin v_x = \frac{\sin \varkappa \,.\, A}{m}$, d. h.

Die Linienkoordinaten A, B, C können auch definiert werden als Gröfsen, die den Momenten der Geraden gegen die Achsen proportional sind.

Aufgabe 11. Zu beweisen: Die Linienkoordinaten a, b, c können den Momenten der Geraden g gegen die unendlich ferne Gerade der x-, y-, z-Ebene proportional gesetzt werden.

Für die unendlich ferne Gerade der x-Ebene ist 1) wie für alle Geraden der x-Ebene $x_2 - x_1 = a = 0 - 0 = 0$. Wenn wir als Punkt 1 den Schnitt mit der y-Achse und als Punkt 2 den Schnitt mit der z-Achse wählen, so ist 2) $y_1 = w, z_1 = 0;\ y_2 = 0,\ z_1 = w$, also $a' = 0,\ b' = -w$, $c' = w;\ A' = w\,w - 0.0 = w^2;\ B' = -w.0,\ C' = -0.w$; es kann $-w.0$ gleich $-1$ gesetzt werden und dann

$$k \sin v_{w_1} = \frac{\sin \varkappa\, w^2\, a}{p};\ k \sin v_{w_2} = \frac{\sin \varkappa\, w^2\, b}{p},$$

$$k \sin v_{w_3} = \frac{\sin \varkappa\, w^2\, c}{p}.$$

Hervorzuheben ist, dafs nur die Möglichkeit der Annahme erwiesen ist.

Aufgabe 12. Den Abstand zweier paralleler Geraden in Linienkoordinaten auszudrücken.

Sind a b c die Richtungskoordinaten, also $\varphi(a, b, c) = 1$ und $\alpha, \beta, \gamma$ die Richtungskosinus, sind die grofsen Koordinaten von g gleich A, B, C, die von g' gleich A', B', C' und sind u v w die Richtungsfaktoren der Abstandslinie, so ist

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0;\ u(A - A') + v(B - B') + w(C - C') = 0,$$

also wenn $A - A' = \mathfrak{A}$ gesetzt wird.

$u = (x - x_0)\lambda = \beta\mathfrak{C} - \gamma\mathfrak{B}$, für $\lambda$ ergiebt sich mit Benutzung von $a\alpha + b\beta + c\gamma = 1$ ohne Mühe 1, und somit für den Abstand d:

$$d^2 = \varphi(u, v, w)$$

schreibt man für $u: \beta\mathfrak{C} - \gamma\mathfrak{B} + 0\mathfrak{A}$ etc., und wendet die Formel an:

$$\varphi(x_1 + x_2 + x_3;\ y_1 + y_2 + y_3;\ z_1 + z_2 + z_3)$$
$$= \Sigma\varphi(x_k) + 2x_1\varphi_1(x_2) + 2y_1\varphi_2(y_2) + 2z_1\varphi_3(z_2)$$
$$+ 2x_1\varphi_1(x_3) + \ldots + 2x_2\varphi_1(x_3) + \ldots$$

und setzt $x_1 = 0\,\mathfrak{A}$; $x_2 = \gamma\,\mathfrak{A}$; $x_3 = -\beta\,\mathfrak{A}$, etc., so ist

$$d^2 = \varphi(u, v, w) = \mathfrak{A}^2\varphi(0, \gamma, -\beta) + \mathfrak{B}^2\varphi(-\gamma, 0, \alpha)$$
$$+ \mathfrak{C}^2\varphi(\beta, -\alpha, 0) + 2\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,(\beta\varphi_1(-\gamma, 0, \alpha) - \alpha\varphi_2(-\gamma, 0, \alpha))$$
$$+ 2\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}\,(\beta\varphi_1(0, \gamma, -\beta) - \alpha\varphi_3(0, \gamma, -\beta)$$
$$+ 2\,.\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,(-\gamma\varphi_1(0, \gamma, -\beta) + \alpha\varphi_3(0, \gamma - \beta)$$

und hieraus, wenn die zu $\varphi$ adjungierte Form $x^2(1 - \lambda^2) + ..\,2\,y\,z\,(\mu\lambda - \nu)$ etc. wieder F genannt wird

$$d^2 = \varphi(a, b, c)\,F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) - \sin^2\varkappa\,(\mathfrak{A}\,a + \mathfrak{B}\,b + \mathfrak{C}\,c)^2,$$

wo $\sin^2\varkappa = (1 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\lambda\mu\nu)$ ist.

Da $\varphi(a, b, c) = 1$, und $\mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c = 0$, so haben wir

$$\mathbf{d^2 = \varphi(u, v, w) = F(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}).}$$

Sind a, b, c Richtungsfaktoren, so ist die rechte Seite durch $\varphi(a)$ zu dividieren; für rechtwinklige Koordinaten erhalten wir

$$d^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = (A - A')^2 + (B - B')^2 + (C - C')^2,$$

wo $a = \alpha$ etc.

Aufgabe 13. Den Abstand eines Punktes $P\{x$ von einer Geraden g in Linienkoordinaten auszudrücken.

Da wir durch den Punkt P die Parallele zu g zeichnen können, so ist die Aufgabe in Aufgabe 12 gelöst, sobald wir für $A'$ etc. setzen $yc - zb$ etc.

Aufgabe 14. Wann liegt ein Punkt $P\{\xi$ auf der Geraden $g\{a, A$? Verbindet man einen ganz beliebigen Punkt $Q\{\xi', \eta', \zeta'$ mit P, so mufs PQ die Gerade g schneiden. Die Bedingung 5) $S = 0$ mufs also für jeden beliebigen Wert der $\xi', \eta', \zeta'$ erfüllt sein, d. h. die Koeffizienten der $\xi'$ etc. in S müssen verschwinden, also

$$6)\quad A = c\eta - b\zeta;\; B = a\zeta - c\xi;\; C = b\xi - a\eta.$$

Das konstante Glied $A\xi + B\eta + C\zeta$ verschwindet dann von selbst, ebenso ist der Bedingung 3) von selbst genügt; bezw. folgt die 3. vom System 6) aus den beiden ersten, in 3) also können nur die Verhältnisse der kleinen Koordinaten von g willkürlich angenommen werden, wenn der Punkt $\xi$ gegeben ist, d. h. durch einen bestimmten

Punkt im Raum geht eine unendlich²fache Menge von Strahlen.

Aufgabe 15. Die Bedingung dafür, dafs die Gerade $g\{a, A$ in einer Ebene $\varepsilon$ liegt.

$\varepsilon\{xu + yv + zw - 1 = 0$; die Gerade mufs die Schnittgerade von $\varepsilon$ mit jeder beliebigen Ebene $\eta\}u'x + ..$ $= 0$ schneiden, das giebt mit Hilfe von Aufgabe 1

$$6a)\quad a = Cv - Bw;\ b = Aw - Cu;\ c = Bu - Av.$$

Das Verschwinden des konstanten Gliedes folgt dann mit Notwendigkeit. Die Ebene enthält also eine $\infty^2$fache Schar von Geraden.

Aufgabe 16. Durch zwei parallele Geraden die Ebene zu legen. $g\{a, A$; $g'\{a\ A'$, die Ebene sei $ux + vy + wz + t = 0$.

6a) ergiebt:

$$7)\quad x(A - A') + y(B - B') + z(C - C') - (BC' - CB') : a.$$

Das konstante Glied ist ebenso gut $-(CA' - C'A) : b$ oder $-(AB' - BA') : c$.

---

## § 13. Der lineare Komplex.

Jede Gleichung zwischen den 6 Linienkoordinaten hebt aus der $\infty^4$fachen Schar aller Geraden eine $\infty^3$fache heraus, welche Linien- oder Strahlenkomplex heifst; Zeichen k. Ist diese Gleichung vom ersten Grad, so heifst der k linear — $k^1$ —. Die Gleichung, welche einen k definiert, darf aber nur von den Verhältnissen der Linien- oder Strahlenkoordinaten abhängen, weil die Gerade selbst nur von diesen Verhältnissen abhängt, d. h. die Gleichung mufs homogen sein.

Ein Beispiel eines $k^1$ lieferte die Gleichung $S = aA' + \ldots + Aa' + .. = 0$, sie definierte den speziellen Komplex aller Geraden, welche die gegebene Gerade a, A schneiden.

Es sei $k^1$ definiert durch die Gleichung:

$$7)\quad D_1 a + D_2 b + D_3 c + d_1 A + d_2 B + d_3 C = 0,$$

wo die d und D Konstanten sind. Damit eine Gerade des

k durch den Punkt $P \{ x_1 \ldots$ gehe, mufs 7) mit 4) kombiniert werden. Dies giebt

$$8) \qquad D_1 (x - x_1) + \ldots d_1 [y_1 z] + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung ist in x, y, z linear und ist erfüllt, wenn $x = x_1$ ist, sie stellt also mit Einer Ausnahme eine Ebene $\varepsilon$ dar, welche durch P geht, also

In jedem linearen Komplex gehen durch jeden Punkt unzählig viele Strahlen des Komplex, welche eine Ebene bilden.

Diese Ebene $\varepsilon$ heifst dem Punkt P als Pol zugeordnete Polare.

Aufgabe 1. Die Ausnahme des Satzes zu untersuchen.

Die Ausnahme tritt ein, wenn 8 identisch erfüllt ist, d. h. wenn gleichzeitig $D_1 - d_3 y_1 + d_2 z_1 = 0$; $D_2 - d_1 z_1 + d_3 x_1 = 0$; $D_3 - d_2 x_1 + d_1 y = 0$; $D_1 x_1 + D_2 y_1 + D_3 z_1 = 0$, d. h. aber nach Aufgabe 12 § 12 der Komplex ist der spezielle Komplex $S = 0$, die d, D sind die Koordinaten einer Geraden s und Punkt P liegt auf der Geraden $s \{ d_1 \ldots D_1$.

In diesem Falle gehört jede Gerade durch P zum Komplex.

Da man auch sagen kann, alle Strahlen des $k^1$, welche in $\varepsilon$ liegen, gehen durch P, so gehört zu $\varepsilon$ wieder P, zu jeder Ebene ist ein Punkt zugeordnet (aufser?)

Aufgabe 2. Diesen Satz durch Rechnung zu beweisen.

Sei $\varepsilon \{ u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1 = 0$ und in ihr liege $g \{ a, A$, so ist nach Aufgabe 7 § 12

$$D_1 [v_1 w] + \ldots . d_1 (u_1 - u) + \ldots = 0$$

alle diese Ebenen gehen durch g und den Punkt

$$- x_1 = \frac{D_2 w_1 - D_3 v_1 + d_1}{d_1 u_1 + d_2 v_1 + d_3 w_1}.$$

also

In jedem $k^1$ liegen in jeder Ebene $\infty$ viele Strahlen des $k^1$, welche alle durch den Punkt P der Ebene gehen; eine Ausnahme tritt für den speziellen Komplex $S = 0$ ein, wenn die Ebene durch s geht, dann gehört jede Gerade der Ebene zum Komplex

oder:

Es sei $\varepsilon \{ ux + vy + wz - 1 = 0$, $g_1$ und $g_2$ zwei Strahlen des $k^1$ in $\varepsilon$, P ihr Schnittpunkt, dann liegen alle Strahlen von P auf $\varepsilon$ und die Gleichung von $\varepsilon$ ist $\{$ 7). Dies giebt für P wieder die vorigen Gleichungen, also die Strahlen des $k^1$ durch einen Punkt erfüllen eine Ebene durch den Punkt, die Strahlen einer Ebene wieder einen Punkt in der Ebene.

Man betrachte nunmehr die Strahlen durch eine Gerade g.

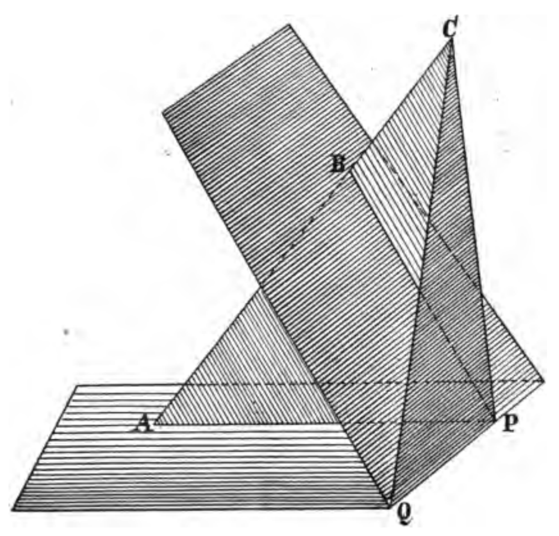



Fig. 16.

Es seien A und B zwei Punkte auf g, und $\alpha$ und $\beta$ die ihnen zugeordneten Ebenen; P sei ein Punkt auf der Schnittlinie h von $\alpha$ und $\beta$, dann sind AP und BP (Fig. 16) Strahlen des $k^1$, also auch PA und PB; die zu P gehörige Ebene $\pi$ geht also durch A und B, somit durch g. Ist also C irgend ein Punkt auf g, so ist PC ein Strahl, folglich auch QC, wenn Q ein anderer Punkt auf h ist, also geht die Ebene $\gamma$ von C wieder durch h, d. h.

Jeder Strahl des $k^1$, welcher g schneidet, schneidet auch h und v. v.

Der Geraden entspricht also wieder eine Gerade.

Man kann auch sagen:

Liegen die Punkte A, B, C... auf einer Geraden g, so schneiden sich ihre Ebenen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auch in einer Geraden h, der Konjugierten von g, und schneiden sich die Ebenen $\alpha \ldots$ in einer Geraden s, so liegen ihre Pole auf einer Geraden.

Aufgabe 3. Wie gestaltet sich der letzte Satz für den Speziellen $k' = S = 0$.

[S ist zu jeder Geraden konjugiert und die Konjugierte zu s ist unbestimmt.]

Es seien ABCD die Ecken eines Tetraeders, $\alpha \beta \gamma \delta$ ihre konjugierten Ebenen, $\beta \gamma \delta$ schneiden sich in $S_1$ etc., dann sind $S_1 B$, $S_1 C$, $S_1 D$ Strahlen des $k^1$ [weil $B S_1$ etc. Strahlen sind], also liegen sie in einer Ebene, also liegt $S_1$ in BCD und das Tetraeder $S_1 S_2 S_3 S_4$ ist dem Tetraeder ABCD zugleich um- und eingeschrieben. Diese merkwürdige Beziehung ist von Möbius entdeckt.

Ist die Gerade g eine Komplexgerade und sind ABC etc. ihre Punkte, so schneiden sich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc., die Polaren, nach Definition in g, also:

Die Komplexgerade g ist ihre eigne konjugierte Gerade.

Aufgabe 4. Diese Sätze durch die Rechnung zu bestätigen und zu einer Geraden g $\{$ a, A die Konjugierte h zu bestimmen.

Ist der Pol $\{ x_1$ die Polare $\{ u_1$, so ist $n u_1 = D_1 + d_2 z_1 - d_3 y_1$, wo $n = D_1 x_1 + D_2 y_1 + D_3 z_1$. Bezeichnet man die Form 7) bezw. 8), welche gleich 0 gesetzt $k^1$ definiert mit k und die Form des speziellen Komplex $d_1 D_1 + \ldots = 0$ mit S, so ergiebt sich, wenn $x_2$ irgend ein zweiter Punkt und g die Verbindungsgerade ist, also $x_2 - x_1 = a$; $[y_1 z_2] = A$.

$\alpha$) $N(u_2 - u_1) = - D_1 k + S A$; $N[v_1 w_2] = d_1 k - a S$.

Ist h die Schnittlinie der Ebenen $u_1$ und $u_2$, so sind ihre Linienkoordinaten nach Aufgabe 7 § 12 hiermit durch die Linienkoordinaten von g ausgedrückt und bleiben daher, von einem unwesentlichen Faktor abgesehen, ungeändert, wenn man für $x_1$ und $x_2$ irgend welche andere Punkte von g wählt und damit auch h. Da wir $N(u_2 - u_1) = A'$ setzen können nach Aufgabe 7 § 12 und $N[v_1 w_2]$ gleich $- a'$ und $- S A$, $- S a$ $\{$ A, a, so zeigt $\alpha$) in der Form $\beta$) $A + A' = - D_1 K$; $a + a' = - d_1 K$ zugleich die Gegenseitigkeit

der Beziehung von g und h, und dafs für $K = 0$ beide identisch sind.

Aufgabe 5. Die Ebene, welche dem Nullpunkt konjugiert ist.

Ein Strahl durch 0 ist gekennzeichnet durch $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, und da für ihn a, b, c $\{$ x, y, z sind, so ergiebt sich sofort

$$D_1 x + D_2 y + D_3 z = 0.$$

Das Resultat ist aus der Formel für $u_1$ der vorigen Aufgabe sofort zu verifizieren und nicht minder leicht aus den Quotienten $v_1 : u_1$, $w_1 : u_1$, wenn man darin $x_1$ etc. gleich Null setzt.

Aufgabe 6. Wann rückt h ins Unendliche, bezw. wann drehen sich die Ebenen, welche den Punkten Einer Geraden polar sind, um eine unendlich ferne Achse, d. h. also, wann verwandelt sich die Drehung in eine Parallelverschiebung?

Eine unendlich ferne Gerade h $\}$ a′, A′ wird nach Aufgabe 1 § 12 gekennzeichnet durch $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, somit giebt $\beta$) von Aufgabe 4) sofort $a : b : c = d_1 : d_2 : d_3$, wir haben den Satz:

Die Geraden g, deren Richtungsfaktoren proportional $d_1$, $d_2$, $d_3$ sind, haben ihre konjugierte Gerade im Unendlichen. Diese Richtung heifst die Achsenrichtung.

Verschiebt sich eine Ebene parallel, so bewegt sich ihr Pol in der Achsenrichtung.

Diejenige Polgerade, welche auf der Schar ihrer konjugierten polaren Ebenen senkrecht steht, heifst Achse.

Aufgabe 7. Die Achse eines linearen Komplex $k^1$, der von $S = 0$ verschieden ist, zu bestimmen.

Da u, v, w den Richtungskosinus der Ebene proportional und diese wieder $\varphi'(d_1)$, $\varphi'(d_2)$, $\varphi'(d_3)$, so ist die Achse bestimmt durch

$$9)\qquad \frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y = y_1}{d_2} = \frac{z - z_1}{d_3}$$

wo

$$-x_1 = \frac{d_1 - D_3\,\varphi'(d_2) + D_2\,\varphi'(d_3)}{\varphi(d_1, d_2, d_3)}, \ldots$$

Aufgabe 8. Wie vereinfacht sich die $k^1$ definierende Gleichung 7), wenn seine Achse zur y-Achse gemacht wird.

Da für die y-Achse $a = 0$, $c = 0$, $b = 1$; $A = B = C = 0$, so erhalten wir $d_1 = 0$, $d_3 = 0$, $d_3 = d_2$; aus $A = y_1 c - z_1 b \ldots$, ergiebt sich $0 = - D_2 \varphi_1' + D_1 \varphi_2'$; $0 = - D_3 \varphi_2' + D_2 \varphi_3'$, und da $\varphi_1' = \nu d_2$, $\varphi_2' = d_2$, $\varphi_3' = \lambda d_2$, so ist $D_1 = D_2 \nu$, $D_3 = D_2 \lambda$, also haben wir:

10) $$d_2 B + D_2 (\nu a + b + \lambda c) = 0.$$

Wählt man dies System so, dafs als y-Ebene eine zur Achse senkrechte Ebene gewählt wird, so sind $\lambda$ und $\nu = 0$, und man hat nach Division mit $D_2$, das von 0 verschieden ist, da $S = 0$ ausgeschlossen.

11) $$\mathbf{d_2 B + b = 0; \quad D_2 b + B = 0.}$$

Auf diese Form kann also jeder von $S = 0$ verschiedener $k^1$ auf $\infty^2$ verschiedene Weisen gebracht werden, da sowohl der O-Punkt als der Winkel $\mu$ unbestimmt sind.

Aufgabe 9. Der $k^1$ geht in sich selbst über, wenn man ihn um seine Achse dreht.

(Folgt aus der Unbestimmtheit von $\mu$.)

Aufgabe 10. Der $k^1$ geht in sich selbst über, wenn man ihn längs seiner Achse verschiebt.

(Folgt aus der Unbestimmtheit von O auf der Achse.)

Aufgabe 11. Wenn die Achse gegeben ist, zu einem Punkt A seine Ebene zu konstruieren.

Wir können das von Punkt A auf die Achse gefällte Lot (Fig. 17) zur z-Achse machen, und die Achse zur y-Achse und die x-Achse senkrecht zu beiden wählen, dann ist die Definitionsgleichung $D_2 b + B = 0$; für den Punkt A ist $x = 0$, $y = 0$, $z = \zeta$, also ist nach 8) seine Ebene $x\zeta + D_2 y = 0$, d. h. die Ebene enthält die z-Achse. Dieselbe Gleichung stellt die Schnittlinie mit der yx-Ebene dar, und wir haben für den Winkel $\varphi$, den sie mit $+ x$ bildet, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\zeta}{D_2}$, und für den Neigungswinkel der Ebene mit der Achse $(\lambda + y)$: $\psi = \varphi - 90$, also $\operatorname{tg} \psi = \frac{D}{\zeta}$. Wir sehen, die Neigung hängt von dem Abstand der Punkte A von der Achse ab. Bewegt sich A von 0 an auf einer Geraden, so dreht sich die Ebene aus der zur Achse senk-

rechten Stellung im Sinne des Uhrzeigers, sie wird vertikal, d. h. geht durch die Achse, wenn A in unendlicher Entfernung von der Achse liegt, und wenn A auf dem andern Zweig derselben Geraden sich wieder 0 nähert, so dreht sich die Ebene im selben Sinne in die Anfangsstellung (horizontale) zurück.

Wählt man mit Plücker die Gerade als Raumelement statt des Punktes oder der Ebene, so ist der lineare Komplex das Gebilde ersten Grades wie in der Punkt-Geometrie die Ebene, in der Ebenen-Geometrie der Punkt, an Stelle des Schnitts zweier Ebenen tritt die Kongruenz ersten Grades,

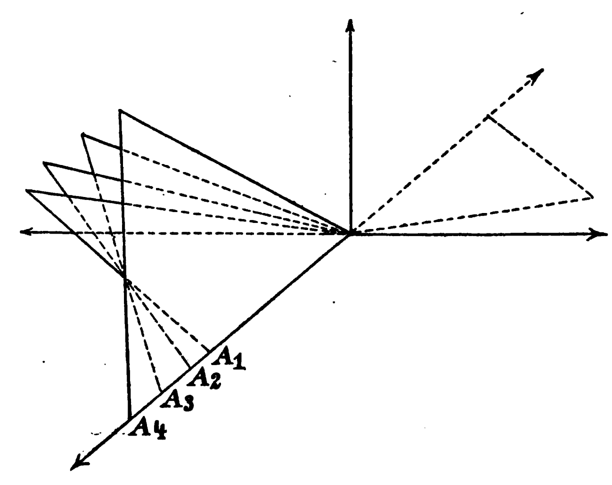



Fig. 17.

d. h. die Gesamtheit der zwei linearen Komplexen gemeinsamen Geraden, wir beweisen den Satz:

Aufgabe 12. Die Kongruenz ersten Grades besteht aus der Gesamtheit aller Geraden, welche zwei feste Geraden schneiden.

Seien C und C′ zwei lineare Komplexe, dann enthält (vgl. S. S. VIII) der Komplex $C + \lambda C'$ alle Geraden, welche C und C′ gemeinsam, und die Kongruenz $C = 0$; $C' = 0$ ist identisch mit der Kongruenz $C + \lambda C' = 0$, $C + \mu C' = 0$, wo $\lambda$ und $\mu$ zwei willkürliche Konstanten (Parameter) sind. Es giebt nun zwei Werte des $\lambda$, für welche der Komplex

$C + \lambda C' = 0$ in den speziellen Komplex $S = 0$ übergeht, bestimmt durch die Gleichung

$$(d_1 + \lambda d_1')(D_1 + \lambda d_2') + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades, nimmt man eine ihrer Wurzeln für $\lambda$ und die andere für $\mu$, so ist unser Satz bewiesen.

Aufgabe 13. Die Gesamtheit aller Geraden, welche drei linearen Komplexen gemeinsam sind, besteht aus der Schar aller Geraden, welche drei feste Geraden im Raume schneiden.

[Da die Gerade im Raum von vier unabhängigen Variabeln abhängt, so ist die Linien- oder Strahlen-Geometrie ein Mittel, die Geometrie im Raum von vier Dimensionen zu versinnlichen.]

## IV. Abschnitt.

# Das Dualitätsprinzip.

---

### § 14. Der Ebenenbüschel.

Seien $H_1 = 0$ und $H_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ in Normalform (§ 7) und P ein beiden Ebenen ortsfremder Punkt. Die Substitution der Koordinaten von P in der Form H werde durch $H^p$ bezeichnet; sie liefert den algebraischen Abstand zwischen P und $\varepsilon$. Nennt man diese Abstände $p_1$ und $p_2$, so ist $p_1 = H_1^p$, $p_2 = H_2^p$. Setzt man $p_1 : p_2 = \lambda$ und sieht in dieser Gleichung $\lambda$ als feste Zahl an, p aber und seine Koordinaten als bis auf die Bindung durch diese Gleichung unbeschränkt variabel (was man durch Weglassung der Strecke p in den Formen H andeutet), so ist $H_1 - \lambda H_2 = 0$ die Ortsgleichung des Punktes P.

Diese Gleichung:

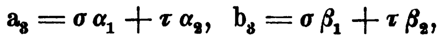
$$1) \qquad U_3 = H_1 - \lambda H_2 = 0$$

ist als lineare die einer Ebene $\varepsilon_3$ und da, wenn $H_1$ und $H_2$ zugleich verschwinden, $U_3$ von selbst verschwindet, so geht $\varepsilon_3$ durch die Schnittgerade von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ (man vgl. S. S. VIII § 15, die Betrachtungen sind fast wörtlich dieselben, nur dafs statt „Gerade" Ebene gesetzt wird). Die Fig. 18 zeigt sofort, dafs $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sin(31)}{\sin(32)} = \lambda$ ist, wenn (31) etc. den Neigungswinkel zwischen den betreffenden Ebenen bezeichnet. Dieser Sinusquotient heifst wieder das Teilungsverhältnis des Winkels (12) der Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ durch $\varepsilon_3$. Wir haben also den Satz:

**Der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Ebenen ein festes Verhältnis haben, ist eine Ebene durch die Schnittgerade jener Ebenen.**

Umgekehrt teilt jede Ebene $\varepsilon_3$ durch die Schnittgerade von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ den Winkel (12) im bestimmten Teilungsverhältnis $\lambda$, und für jeden Punkt auf $\varepsilon_3$ ist $\frac{p_1}{p_2} = \lambda$, somit mufs $U_3 = H_1 - \lambda H_2 = 0$ die Gleichung jeder Ebene durch die Schnittgerade von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ sein, wie in Aufgabe 24 § 11 bewiesen.

Der Beweis kann auch wie in S. S. VIII geführt werden. $U_3 = a_3 x + \ldots$; bestimmt man 2 Zahlen $\sigma$ und $\tau$, so dafs



$$a_3 = \sigma \alpha_1 + \tau \alpha_2, \quad b_3 = \sigma \beta_1 + \tau \beta_2,$$

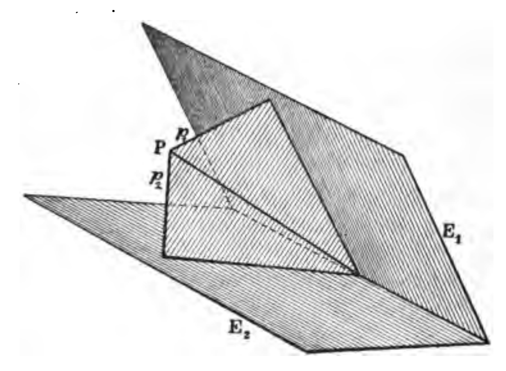



Fig. 18.

so ist $U_3 = \sigma H_1 + \tau H_2 + f z + g$. Soll nun $U_3$ durch $(H_1 H_2)$ gehen, so mufs $f z + g$ für die unzähligen z aller Punkte dieser Geraden verschwinden, das ist nur möglich, wenn $f = 0$ und $g = 0$, d. h. $U_3 = \sigma H_1 + \tau H_2$, also $U_3 = 0 \{ H_1 - \lambda H_2 = 0$.

Die Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ teilen den Raum in 4 Fächer, die zu je zwei und zwei als Scheitelräume gleich sind; in dem einen Paar, dem „Aufsenraum" haben die Abstände eines Punktes von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ gleiches Zeichen, in dem andern Paar, dem Innenraum, entgegengesetztes. Dreht sich $\varepsilon_3$ im Innenraum von $\varepsilon_1$ nach $\varepsilon_2$, so nimmt $\lambda$ fortwährend ab von $-0$ bis $-\infty$, dreht sich $\varepsilon_3$ dann weiter durch den

Aufsenraum von $\varepsilon_2$ nach $\varepsilon_1$, so nimmt $\lambda$ ab von $+\infty$ bis $+0$. Es gehört also zu jeder Ebene $\varepsilon_3$ ein $\lambda$, und zu jedem $\lambda$ wieder diese Ebene. Eine solche Schar von Ebenen heifst ein Ebenenbüschel, die gemeinsame Gerade heifst der Träger des Büschels, die Gröfse $\lambda$ der Parameter.

Sind die Ebenen statt in Hessescher Form in allgemeiner Form $U_1 = a_1 x + \ldots$, $U_2 = a_2 x + \ldots$ gegeben, so ist (§ 8, 19) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{U_1 \mu_1}{U_2 \mu_2}$, wo $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{f(a_2 b_2 c_2)}{f(a_1 b_1 c_1)}}$, also für dieselben Ebenen eine Konstante und man erhält als Gleichung des Büschels:

$$1a) \qquad U_3 = U_1 - \lambda U_2 = 0.$$

Für die Achsenform der Ebene, die für den Büschel besonders zweckmäfsig ist, ist d gleich $-1$. Ist $U_4 = U_1 - \mu U_2$ eine andere Ebene des Büschels, so ist der Quotient der Teilungsverhältnisse, da $\mu_1 : \mu_2$ sich weghebt, gleich $\lambda : \mu$.

Den Quotienten der Teilungsverhältnisse nennen wir das Doppel- oder anharmonische Verhältnis der vier Ebenen, analog dem Strahlenbüschel der ebenen Geometrie, und es gestalten sich die Sätze und die Rechnungen ganz gleichartig.

Aufgabe 1. Das Doppelverhältnis der vier beliebigen Ebenen des Büschels durch den Parameter auszudrücken.

Sei $\varepsilon_1 = U_1 - \lambda_1 U_2 \ldots \varepsilon_4 = U_1 - \lambda_4 U_2$; wir setzen (vgl. S. S. VIII S. 58 A. 17) $U_1 - \lambda_1 U_2 = V_1$, $U_1 - \lambda_2 U_2 = V_2$, dann wird $U_3 \{ V_1 - \tau_1 V_2$ und $U_4 \{ V_1 - \tau_2 V_2$; dann ist das Doppelverhältnis $\delta$ oder $\frac{\sin 31}{\sin 32} : \frac{\sin 41}{\sin 42}$ bestimmt durch $\tau_1 : \tau_2$; aber für $\tau_1$ ergiebt sich $\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}$ etc., also

$$2) \qquad \delta = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}.$$

Die Grundebenen $U_1$ und $U_2$ gehören selbst zum Büschel; für $U_1$ ist $\lambda = 0$, für $U_2$ wird $\lambda$ gleich $\infty$ gesetzt.

Hat $\delta$ den Wert $-1$, so heifsen die Ebenen harmonisch (S. S. VIII S. 54). Die Bedingung dafür ist

$$3) \qquad \frac{\sin(31)}{\sin(32)} + \frac{\sin(41)}{\sin(42)} = 0; \quad \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} = 0$$

und im besondern, wenn $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ identisch mit $U_1$ und $U_2$,

3a) $$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Aufgabe 2. Hauptsatz: Vier Ebenen eines Büschels werden von jeder fünften, die nicht zum Büschel gehört, in vier Strahlen eines unveränderlichen Doppelverhältnisses, des der Ebenen, geschnitten.

Die Ebenen seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, die Schnittgeraden $a_1 \ldots a_4$, dann ist sofort klar, dafs die vier a sich auf dem Träger des Büschels schneiden, also einem ebenen Strahlenbüschel angehören (Fig. 19). Denkt man sich nun im beliebigen Punkt O auf der Trägergerade die Normalebene

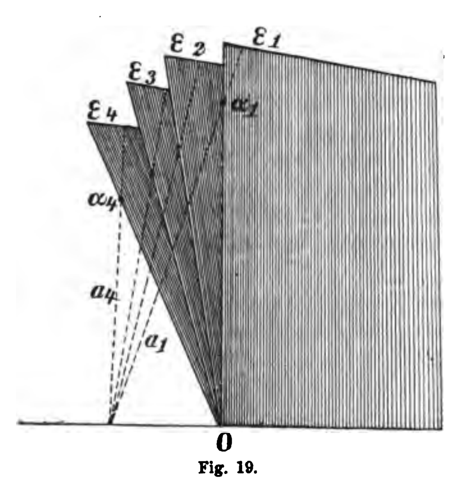


Fig. 19.

zu derselben, so schneidet sie die a in vier Punkten $\alpha_1 \ldots \alpha_4$, welche als gemeinsame Punkte zweier Ebenen in Einer Geraden l liegen, und es ist also (vgl. auch S. S. VIII S. 56)

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = (\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = (\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4).$$

Aufgabe 2a. Den Satz durch Rechnung zu beweisen.

Die Ebenen seien $\varepsilon_1$; $\varepsilon_2$; $\varepsilon_1 - \lambda\varepsilon_2$; $\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_2$. Die Schnittebene V werde zur y-Ebene gewählt, dann erhält man die Schnittgeraden dadurch, dafs man in den vier Formen der Ebenen $y = 0$ setzt, d. h. die Gleichungen werden $u_1 = 0$; $u_2 = 0$; $u_1 - \lambda u_2$; $u_1 + \mu u_2$, d. h. also $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = (\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4)$.

Aufgabe 3. Je vier Ebenen eines Büschels werden von jeder Geraden, die den Träger nicht schneidet, in vier Punkten eines festen Doppelverhältnisses, des der Ebenen, geschnitten.

(Jede Ebene durch g schneidet die vier Ebenen in vier Strahlen $a_1 \ldots$, deren Doppelverhältnis gleich dem der Ebenen und dem der Punkte ist.)

Aufgabe 4. Umkehrung vom vorigen Satz.

Sind A B C D vier Punkte einer Geraden g, und legt man durch eine Gerade s, welche g kreuzt und die vier Punkte die Ebenen $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4$, so ist das anharmonische Verhältnis der vier Ebenen konstant und gleich dem der Punkte.

Der Satz folgt durch Vermittlung von Aufgabe 2 unmittelbar, kann aber auch durch Rechnung bewiesen werden. Die Koordinaten der Punkte sind $x_a \ldots$, $x_b \ldots$, $\frac{x_a - \lambda x_b}{1 - \lambda} \ldots$ $\frac{x_a - \mu x_b}{1 - \mu}$ und die Formeln 17 § 11 beweisen den Satz, oder noch einfacher 17a), da man A als y-Achse ansehen kann (oder $s \{ \varepsilon_1 - p\, \varepsilon_2$, $p = 0$, $p = \infty$, $p = ?$).

Aufgabe 5. Welche Bedeutung haben für das Büschel $H_1 - \lambda H_2 = 0$, wenn H die Hessesche (Normal)form bedeutet, die Ebenen für die $\lambda = \pm 1$ ist?

Aufgabe 6. Die drei Halbierungsebenen der drei Winkel eines Dreikants schneiden sich in einer Geraden.

Es seien $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$ drei Ebenen, welche ein Dreikant S A B C bilden; S A, S B, S C seien die Kanten, $SAB = \varepsilon_3$ etc. Der Anfangspunkt liegt im Innern des Dreikants, dann sind $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \eta_3 = 0$; $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \eta_1 = 0$; $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \eta_2 = 0$ die Halbierungsebenen der drei (inneren) Keile oder Winkel des Dreikants, da $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$, so ist der Satz bewiesen. — Die Sätze über die Drei- und Viel-Kanten gewinnen an Anschaulichkeit, wenn man sie auf die Kugel überträgt, welche man um den Scheitel S des Vielkants mit beliebigem Radius, den man als Längeneinheit wählt, schlagen kann. Diese Kugel heifst der Kugelschnitt des Vielkants. Es kommt dies darauf hinaus, die Ebenen des Büschels von einem beliebigen Punkt S des Trägers auf eine Kugel mit Centrum S zu projizieren. Die Ebenen des

Büschels projizieren sich dann auf die Kugel als eine Schar von Meridianen, d. h. Hauptkreisen mit gemeinsamen Durchmesser (auf dem Träger des Büschels). Da für alle diese Hauptkreise der Radius konstant bleibt, so unterscheiden sie sich nur durch die verschiedenen Gleichungen der Ebenen des Büschels, und können daher mit denselben Formen bezeichnet werden bezw. mit dem Wert des Parameters. Den Hauptkreis nennen wir Kugelgerade, seine Hälfte: (Kugel-)Strahl; einen Bogen desselben, der kleiner als der Halbkreis: (Kugel-)Strecke, und als Länge des Bogens setzen wir den Sinus seines Centriwinkels, bezw. seiner Amplitude, so dafs wir $\sin \widehat{AB}$ mit AB bezeichnen.

Der eben bewiesene Satz heifst dann:

Im sphärischen Dreieck schneiden sich die Halbierungslinien der drei Winkel in Einem Punkte, dem sphärischen Mittelpunkt des Inkreises. (Heifst dieser $\mu$, so ist sein Gegenpunkt $\mu'$ ebenfalls Centrum des Inkreises, da auf der Kugel jeder Kreis zwei Centren hat.) Man braucht den Satz für die Nebenräume nicht erst zu beweisen, denn wenn man den Gegenpunkt von A durch A′ bezeichnet, so ist B C A′ auch ein sphärisches Dreieck. Rechnung: $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0$.

Aufgabe 7. Die Halbierungslinien der Nebenwinkel eines sphärischen Dreiecks schneiden die Gegenseiten in drei Punkten Einer Geraden. Bilden wir $U = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, so ist $U = 0$ die Gleichung einer Ebene $\eta$, welche durch s und durch die Schnittpunkte von $\varepsilon_1$ mit $(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 0$ geht. Vier Ebenen eines Büschels bezw. Halbebenen projizieren sich auf der (Einheits-)Kugel in vier Kugel-Geraden bezw. -Strahlen, deren Doppelverhältnis wir gleich dem der Ebene setzen. Die Strahlen haben gemeinsame Endpunkte. Vier Strahlen, vom Centrum S ausgehend, projizieren sich in vier Punkten, deren Doppelverhältnis wir gleich dem der Strahlen setzen.

Sind z. B. A C P Q vier solche Punkte, so ist ihr Doppelverhältnis $\frac{AP}{CP} : \frac{AQ}{CQ}$ und wenn sie harmonisch $\frac{AP}{CP} + \frac{AQ}{CQ} = 0$, und es gelten alle Sätze S. S. VIII § 15 auch von Strahlbüscheln auf der Kugel bezw. für das Ebenenbüschel.

Aufgabe 8. Die Sätze in Aufgabe 2, 3, 4 auf die Kugel zu übertragen.

Aufgabe 9. Legt man von einem Punkt auf einem der harmonischen Strahlen (Ebenen) $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$, z. B. von Q auf $U_4$ zwei Querstrahlen (Ebenen) durch den Büschel und verbindet ihre Schnittpunkte mit $U_1$ und $U_2$ über Kreuz, so schneiden sich diese Verbindungs-Geraden (Ebenen) auf $U_3$.

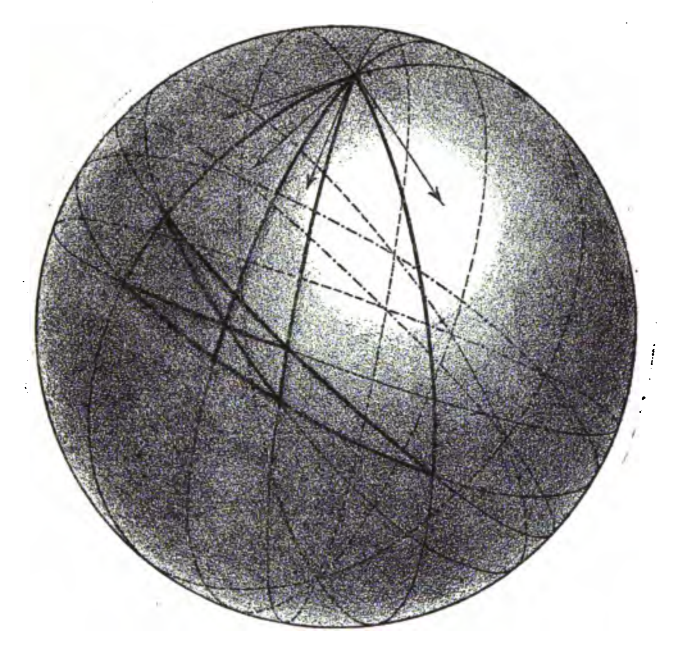


Fig. 20.

Fig. 20. Vgl. S. S. VIII, S. 69 und den Satz: wenn die Zuordnung feststeht, giebt es zu drei Ebenen nur Eine vierte harmonische.

Aufgabe 10. Zwei harmonische Systeme, welche einen Strahl (eine Ebene) gemeinsam haben, schneiden sich auf ein und derselben Geraden (Ebene) und es kann das vollständig verschiedene Paar über Kreuz kombiniert werden.

Fig. 20. Es seien $U_1$ $U_2$ $U_3$ $U_4$ harmonisch, $U_1$ kon-

jugiert $U_2$; $U_3$ mit $U_4$; $U_1' \ldots$ sei ein zweites harmonisches System und $U_1 \equiv U_1'$; dann ist:

$U_3 - U_3' \equiv \lambda' U_2' - \lambda U_2 \equiv U_4 - U_4'$, d. h. aber, da $U_1 \equiv U_1'$, die vier harmonischen Strahlen-(Ebenen-)Paare schneiden sich auf derselben Geraden (Ebene). Da

$$U_4 - U_3' \equiv U_4' - U_3 \equiv \lambda U_2 + \lambda' U_2' \text{ und } U_1 \equiv U_1',$$

so liegen auch die Schnittpunkte (Geraden) von $U_4$ und $U_3'$; $U_4'$ und $U_3$; $U_2$ und $U_2'$; $U_1$ und $U_1'$; auf einer Geraden (Ebene).

Aufgabe 11. Der Satz vom vollständigen Vierseit auf der Kugel:

Durch jede Ecke eines vollständigen Kugel-Vierseits (jede Kante eines vollständigen Vierkants) gehen drei Strahlen (Ebenen), die beiden Seiten und eine Diagonale; der (die) zur Diagonale zugeordnete vierte harmonische Strahl (Ebene) ist die Gerade (Ebene), welche die Ecke (Kante) mit dem Schnittpunkt (der Schnittgeraden) der beiden nicht durch die Ecke (Kante) gehenden Diagonalen verbindet.

Aufgabe 12. Zu drei Strahlen (auf der Kugel) eines Strahlenbüschels den zu einem von ihnen zugeordneten vierten harmonischen zu konstruieren.

Aufgabe 13. Wenn A P C Q vier harmonische und P in der Mitte von A C liegt, wo liegt Q, wie grofs ist A Q + C Q?

(Die Strecken sind nicht gröfser als $\pi$, CQ und QC sind entgegengesetzt gleich; also P Q Quadrant, A Q + Q C $= \pi$.)

Aufgabe 14. Den Menelaos und damit auch den Ceva (S. S. VIII S. 70) zu beweisen, wir benutzen dazu den Hülfssatz:

Das Verhältnis der Abschnitte einer Sehne (in der Ebene) ist gleich dem (der Sinus) der zugehörigen Bogenabschnitte.

[Es ist

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BF} = \frac{BD}{SB} : \frac{BF}{SB} = \frac{\sin ASP}{\sin CSP} = \frac{AP}{PC}.]$$

Projizieren wir die Punkte A′ C′ Q der Fig. 21 vom Centrum S aus durch die Kugelradien auf die Ebenen R A C in $\alpha' \gamma' \varkappa$ und bemerken, dafs $\alpha' \gamma' \varkappa$ als gemeinsame Punkte

zweier Ebenen in einer Geraden liegen und zwar $\alpha'$ auf der ebenen Geraden AR, $\gamma'$ auf CR und $\varkappa$ auf der ebenen Geraden AC (als Punkt der den Ebenen RAC und SAC gemeinsam), so gilt für das (ebene) Dreieck RAC der ebene Menelaos. Es ist

$$\frac{A\alpha'}{R\alpha'} \cdot \frac{R\gamma'}{C\gamma'} \cdot \frac{C\varkappa}{A\varkappa} = -1$$

und nach unserem Hülfssatz

$$\frac{AA'}{RA'} \cdot \frac{RC'}{CC'} \cdot \frac{CQ}{AQ} = -1$$

womit der Menelaos auf der Kugel bewiesen ist, und da

$$\frac{CQ}{AQ} = -\frac{CP}{AP}$$

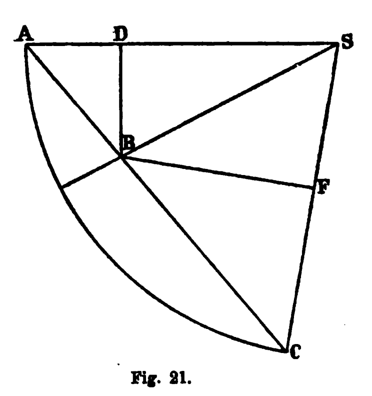


Fig. 21.

auch der Ceva. Also:

Werden die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks von einer sphärischen Geraden geschnitten, so sind die Produkte der Wechselabschnitte einander entgegengesetzt gleich.

Schneiden sich die Ecktransversalen eines sphärischen Dreiecks in einem Punkt, so sind die Produkte der Wechselabschnitte einander gleich.

Aufgabe 15. Menelaos und Ceva umzukehren.

(Vgl. S. S. VIII). Da wir uns auf Längen nicht gröſser als $\pi$ beschränken, so bestimmt der Tangentialsatz aus den Sinusquotienten zweier Bogen und der Summe oder Differenz derselben die Bogen eindeutig, es gelten daher die Bemerkungen in der S. S. VIII S. 71 und wir haben dieselben Sätze fürs sphärische Dreieck.

Aufgabe 16. Im sphärischen Dreieck schneiden sich die Höhen in einem Punkte.

$$\left[\frac{AE}{EC} = \frac{\cot\alpha}{\cot\gamma}\right].$$

Aufgabe 17. Im sphärischen Dreieck schneiden sich die Mittellinien in einem Punkte.

Aufgabe 18. Im sphärischen Dreieck schneiden sich die drei den Winkel halbierenden Ecktransversalen in Einem Punkte.

Aufgabe 19. Sind A B C D vier harmonische Punkte, ist M die Mitte von A B also M A = M B = s, M C = c, M D = d, so ist $tg^2 s = tg\, c \,.\, tg\, d$.

(Vgl. S. S. VIII S. 55), analog ist die Relation für vier harmonische Strahlen.

Aufgabe 20. Die Geraden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten des Inkreises verbinden, schneiden sich in Einem Punkte.

Jeder dieser Sätze gehört zu einer Gruppe von vier Sätzen, welche auseinander durch Vertauschung von einem, zwei, drei Punkten mit ihren harmonischen hervorgehen (vgl. S. S. VIII).

Aufgabe 21. Die drei (sphärischen) Berührungssehnen des Inkreises schneiden die Gegenseiten in Punkten, welche auf einer (sphärischen) Geraden liegen (Harmonikalen des Mittelpunktes).

Aufgabe 22. Die drei Seiten des Höhenfufspunkten-Dreiecks schneiden die drei Gegenseiten in drei Punkten Einer Geraden (Harmonikalen des Höhenpunktes).

Aufgabe 23. Die drei die Flächen halbierenden Ecktransversalen schneiden sich in Einem Punkte.

Die Bezeichnung sei die übliche; es ist in allen 6 Hälften von A B C der sphärische Exzefs und damit die halbe Winkelsumme $\sigma$ dieselbe. Es ist für drei beliebige Ecktransversalen A D, B E, C F, wenn man die Sinuszeichen wegläfst:

$$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE} = \frac{\alpha' \beta' \gamma'}{\alpha'' \beta'' \gamma''} = n.$$

Unter Benutzung der Formel $\sin^2 \frac{c}{2} = \frac{-\cos\sigma \cos(\sigma - \gamma)}{\sin\alpha \sin\beta}$ erhalten wir, wenn die Formel der Reihe nach auf A D, B E, C F angewandt wird (je zweimal):

$$\frac{\cos(\sigma - \alpha_1) \cos(\sigma - \beta_1) \cos(\sigma - \gamma_1)}{\cos(\sigma - \alpha_2) \cos(\sigma - \beta_2) \cos(\sigma - \gamma_2)} = 1 = t$$

und wenn wir die Formel auf die Seiten A C in A C D und A F C etc. anwenden

$$q = \frac{\cos(\sigma - \delta_1) \cos(\sigma - \varepsilon_1) \cos(\sigma - \varphi_1)}{\cos(\sigma - \delta_2) \cos(\sigma - \varepsilon_2) \cos(\sigma - \varphi_2)} = n.$$

Es ist aber q gleich t, wie die Formel

$$\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \frac{-\cos\sigma\,(\sigma-\delta_1)}{\cos(\sigma-\alpha_1)\cos(\sigma-\beta)}$$

ergiebt, also $n = q = t = 1$. Der Beweis ist eine Vereinfachung des Beweises von Huebner.

---

## § 15. Analytische Sphärik.

Wie vollkommen die Übereinstimmung zwischen der analytischen Sphärik und der Planimetrie ist, wird am klarsten durch Einführung der Weierstrafs-Killing'schen Koordinaten.

Als Koordinatensystem nehmen wir zwei aufeinander senkrechte Kugelstrahlen, die sich in O halbieren, die Bogen

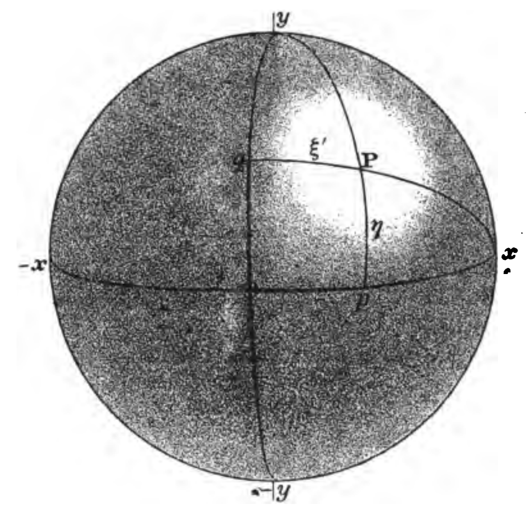



Fig. 22.

o y etc. der Fig. 22 sind Quadranten, der Radius die Längeneinheit; wir beschränken uns auf die Halbkugel, welche durch die Kugelgerade x y — x — y abgeschnitten wird. Als Koordinaten eines Punktes P definieren wir die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche

die Kugelstrahlen $yP$ und $xP$ mit den Koordinatenstrahlen bilden. Diese Winkel werden durch die Bogen $Op$ gleich $\xi$ und $Oq$ gleich $\eta$ gemessen, so dafs $P\{x, y$ und $x = \operatorname{tg}\xi$; $y = \operatorname{tg}\eta$.

Aufgabe 1. Die Abstände des Punktes P von den Achsen zu bestimmen.

Sie seien $\eta'$ und $\xi'$, dann ist aus dem rechtwinkligen Dreiecke $Pp'x$ und $Pq'y$:

$$\text{I)}\quad \operatorname{tg}\eta' = y\cos\xi;\ \operatorname{tg}\xi' = x\cos\eta;\ \cos\eta' : \cos\xi' = \cos\eta : \cos\xi.$$

Aufgabe 2. Der Abstand r des Punktes P vom Anfangspunkt.

Man bezeichnet allgemein die trigonometrische Tangente eines Bogens und den Bogen gleich (Fig. 22),

$$\text{II)}\qquad r^2 = x^2 + y^2,$$

also ganz unverändert gegen die planimetrische.

Aufgabe 3. Die Entfernung r zweier Punkte $A\{x_1 \ldots$ und $B\{x_2 \ldots$

Aus dem Dreieck $AyB$ giebt der Kosinussatz (mühelos für den geschickten Rechner)

$$\text{III)}\quad r^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}.$$

Aufgabe 4. Die Gleichung eines Kugelstrahles in Kugelkoordinaten.

Der Strahl schneide auf den Achsen die Bogen $\alpha$ und $\beta$ ab, $OA$ gleich $\alpha$, $OB$ gleich $\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$. Der Winkel, den der Strahl mit der X-Achse bildet, sei $\varphi$. Ist P ein Punkt der Geraden, so ist (Fig. 23)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\eta'}{\sin(\alpha - \xi)}$$

oder mit Anwendung von I)

$$\text{IV)}\qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

also die Achsenform bleibt unverändert.

Geht die Gerade durch O, so versagt die Achsenform, die Gerade wird durch den Winkel $\varphi$ bestimmt, und es ergiebt sich

IVa) $$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

wie in der Planimetrie.

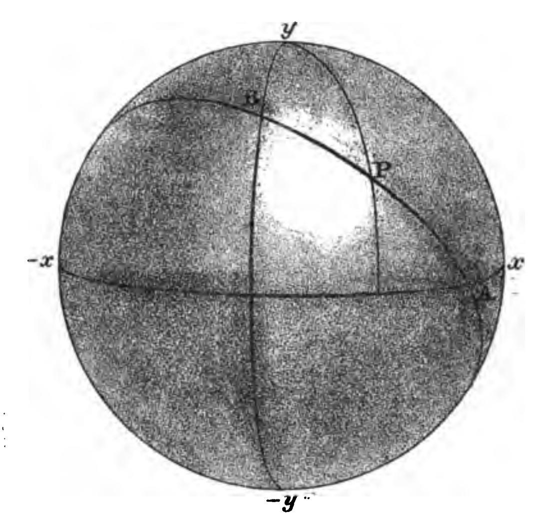



Fig. 23.

Aufgabe 5. Die Gerade zu bestimmen durch das Lot n von O und die Winkel $\alpha$ und $\beta$, welche das Lot mit den Achsen bildet.

Aus IV) ergiebt sich, da $a = n : \cos\alpha$, $b = n : \cos\beta$,

IVb) $$x \cos\alpha + y \cos\beta - n = 0$$

d. h. die Hessesche Form der Geraden ändert sich nicht.

Aufgabe 6. Jede in x und y lineare Gleichung stellt einen Kugelstrahl dar.

Aufgabe 7. Die Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte 1 und 2.

IVc) $$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}.$$

Aufgabe 8. Den Abstand eines Punktes $P \{ x_1, y_1$ von einer in Hesse'scher Form gegebenen Geraden.

Fig. 24 $\sin\delta = \cos PG \sin FG$;

$$\sin^2\delta = \frac{\cos^2 r}{\cos^2 n'} \cdot \frac{tg^2 FG}{1 + tg^2 FG};$$

$$n' - n = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - n = H_p$$

$$\text{V)} \quad \sin^2\delta = \frac{\cos^2 r\, H_p^2}{\cos^2 n}; \quad \sin\delta = \frac{\cos r\, H_p}{\cos n},$$

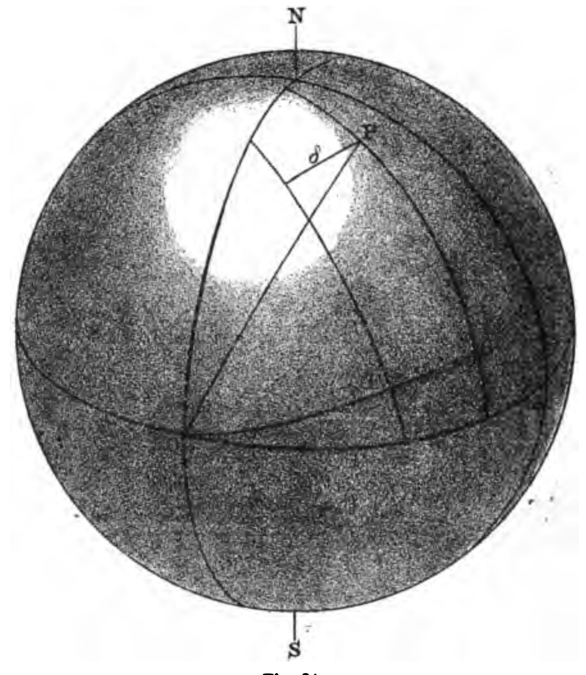



Fig. 24.

wo $r^2 = x_1^2 + y_1^2$ also nur von P abhängt und n nur von der Geraden, also liegen die Punkte, für welche das Verhältnis der Sinus der Abstände konstant, auf einem Strahl.

Aufgabe 9. Die Gleichung des Kreises.

Die Kreislinie behält auf der Kugel ihre Gestalt, die Kreisfläche wird zur Kalotte, die definierende Eigenschaft bleibt bestehen; Ort der Punkte, die vom Centrum O die Entfernung r haben (Fig. 22).

Es ist $\cos r = \cos Pp \cos \xi$; quadrieren wir und setzen $\operatorname{tg} r = r$, so giebt II):

IV) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Gleichung des Kreises bleibt unverändert.

Aufgabe 10. Die Gleichung der Parabel.

Fig. 25. Wenn F auf der x-Achse der Brennpunkt und $OF = f$, $OS = \frac{1}{2} f = f'$, so ist für einen beliebigen Parabelpunkt $P : \xi' = PF$ also $\cos \xi' = \cos \eta' \cos (\xi - f)$ und nach Aufgabe 1 $\cos \xi = \cos \eta (\cos \xi - f)$.

Verschiebt man den Koordinatenanfang nach S, so bleibt der Pol Y, der Pol X rückt um $f'$, es ist $\xi_1 = \xi - f$ und $\eta_1$ bestimmt sich dadurch, dafs $\eta'$ in Bezug auf das neue System ungeändert bleibt, also: $\operatorname{tg} \eta \cos \xi = \operatorname{tg} \eta_1 \cos \xi_1$. Diese Formeln entsprechen der Parallelverschiebung, wie denn diese Kugelkoordinaten in die gewöhnlichen übergehen, wenn der Radius, die Längeneinheit unendlich. Wir erhalten $\frac{\cos^2 (\xi - f)}{\cos^2 \xi} = 1 + t^2 \eta = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \eta_1 \cos^2 \xi_1}{\cos^2 \xi}$ und hieraus ohne weiteres, da $\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$ ist,

V) $$\operatorname{tg}^2 \eta_1 = 2 \operatorname{tg} \xi_1 \sin f; \quad y^2 = 2px.$$

Auch diese Formel bleibt unverändert.

Aufgabe 11. Die Gleichung der Ellipse.

Es seien A und B die beiden Brennpunkte, M die Mitte, sei Koordinatenanfang $AB = 2c$; die konstante Summe der Entfernungen des Ellipsenpunktes P von A und B, $\varrho + \varrho_1$ sei $2a$; $\varrho - \varrho_1 = 2\delta$, hann haben wir sofort (Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen für $\cos \varrho$ und $\cos \varrho'$)

$$\cos a \cos \delta = \cos \eta' \cos \xi \cos c; \quad \sin a \sin \delta = \cos \eta' \cos \xi \sin c$$

also

$$1 = \cos^2 \eta' \cos^2 \xi (p + x^2 q),$$

wo

$$p = \frac{\cos^2 c}{\cos^2 a}; \quad q = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 a}; \quad \frac{1}{\cos^2 \eta'} = 1 + \operatorname{tg}^2 \eta'$$

$$= 1 + y^2 \cos^2 \xi = \cos^2 \xi \left(\frac{1}{\cos^2 \xi} + y^2\right); \quad y^2 + 1 + x^2 = p + x^2 q$$

also

VI) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wo $a = \operatorname{tg} \alpha$; $b = \operatorname{tg} \beta$ und $\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + c) \sin(\alpha - c)}{\cos^2 \alpha}$.

Die Formeln zeigen, dafs die Ellipse aus dem Kreise durch Zusammendrückung der Ordinaten im Verhältnis b : a hervorgeht (vgl. S. S. VIII S. 220).

Aufgabe 12. Einer Geraden entspricht bei dieser Zusammendrückung (affin) wieder eine Gerade; affine Gerade schneiden sich auf der X-Achse.

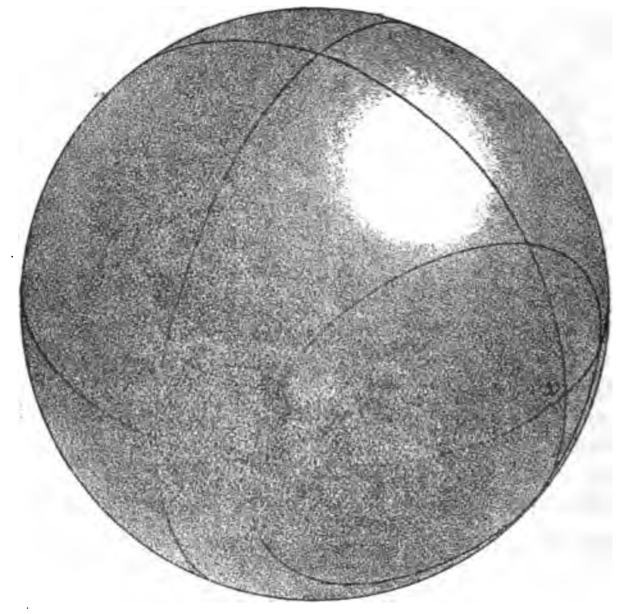


Fig. 25.

Aufgabe 13. Welche Gerade entspricht affin dem Polkreis $yx - y - x$?

Diese Gerade tritt, da für sie $a = \infty$, $b = \infty$, also $0 = 1$, an Stelle der unendlich fernen Geraden der Ebene; sie entspricht affin sich selbst.

Aufgabe 14. Die Gleichung der Hyperbel.

Wie Aufgabe 11 ergiebt sich als Ort der Punkte, für welche $(r - r') = 2a$ ist... $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Wir überlassen hier die Sphärik dem Leser, den wir auf L. Huebner, ebene und räumliche Geometrie des Mafses verweisen. Mit dem Sinussatze und wegen desselben bleibt die ganze projektive Geometrie samt Menelaos, Ceva, Involution etc. ungeändert; es bleibt die Lehre vom Kreise (Potenzsätze, Berührungsproblem), die ganze Lehre von den

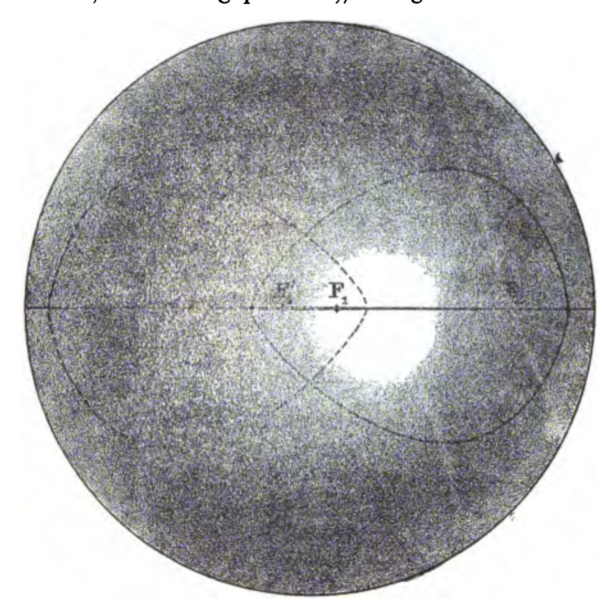



Fig. 25 a.

Kegelschnitten incl. Pascal und Brianchon (unsre Konstruktionen S. S. VIII erleiden kaum bemerkbare Änderungen). Der einzige wirkliche Unterschied ist das Fehlen der unendlich fernen Geraden, bezw. dafs auf jedem von P ausgehenden Strahl der diametrale Punkt P′ an Stelle von $\Omega$ tritt. Nur einige Bemerkungen: Geht man über die zu O gehörige unendlich ferne Gerade, den Polkreis hinaus auf die andre Halbkugel, so besteht die Parabel, welche dann zwei Brennpunkte F und F′ hat, wo F′ Gegenpunkt von F,

aus zwei diametral-symmetrischen geschlossenen Ovalen, deren eins die Fig. 25 zeigt. — Die vollständige Ellipse hat vier Brennpunkte $F_1$, $F_2$, $F_1'$, $F_2'$; sie besteht aus zwei geschlossenen Ovalen, für die allerdings für die Punkte des auf der Ergänzungshalbkugel liegenden Teiles, obgleich sie die Gleichung erfüllen, $r + r' = 2\pi - 2a$ ist in Bezug auf die Brennpunkte A und B. Ebenso besteht die vollständige Hyperbel aus zwei diametralen geschlossenen Teilen.

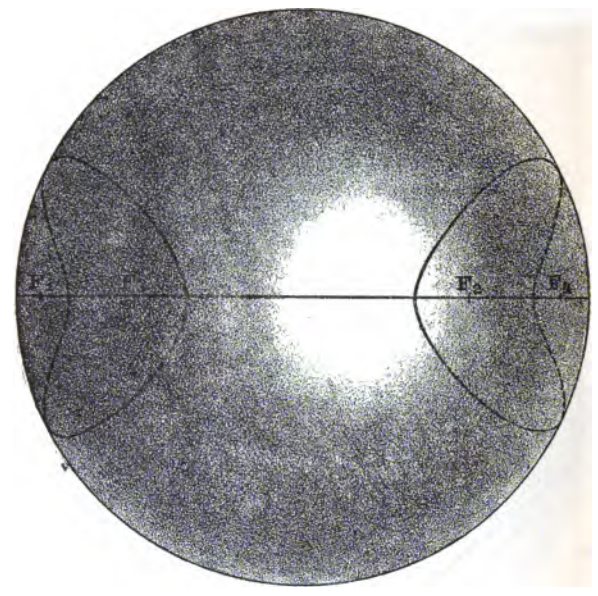


Fig. 26.

Aufgabe 15. Die vollständige Ellipse mit den Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ ($F_1'$ und $F_2'$) ist zugleich die vollständige Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1$ und $F_2'$ ($F_1'$ und $F_2$) und die Hauptachsen ergänzen sich zu $\pi$. Die Fig. 26 zeigt ausgezogen die halbe Hyperbel. Zieht man von B′ nach einem Punkt P der Ellipse den Brennstrahl $\varrho'$, so ist $\varrho' = \pi - r'$, also $\varrho' - r = \pi - (r + r')$; $\zeta' - r = \pi - 2a$.

Aufgabe 16. Die vollständige Parabel hat zwei Brennpunkte im Unendlichen, die Pole x und — x.

**Aufgabe 17. Die Parabel ist eine Ellipse, deren zweiter Brennpunkt im Unendlichen, d. h. in x und für die die konstante Summe der Abstände, die grofse Achse, unendlich, d. h. $\frac{\pi}{2}$ ist.**

(Der Bogen durch P senkrecht auf die Leitlinie geht durch X.)

**Aufgabe 18. Die Ellipse ist eine Parabel, deren Leitlinie ein kleiner Kreis ist.**

Fig. 26a; vgl. S. S. VIII, S. 263. Die Figur stellt einen Kegel dar, der durch eine Ebene in einer Ellipse $\varepsilon$

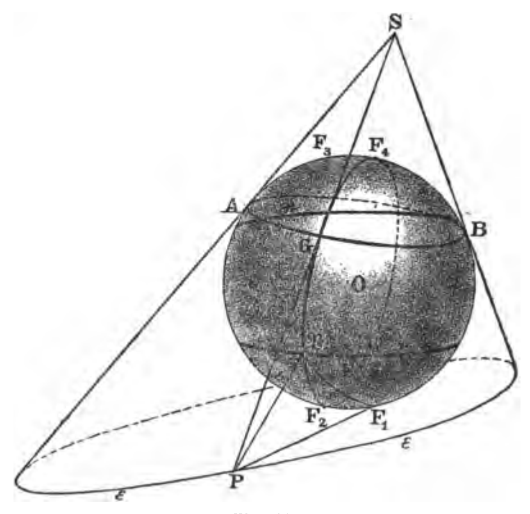



Fig. 26a.

geschnitten wird, und diese ist vom Centrum O der eingeschriebenen Kugel, welche im Brennpunkt $F_1$ berührt, auf die Kugel in die sphärischen Ellipsen e projiziert. Es ist $PF_1 = PG$ als Kugeltangenten, $\sphericalangle GOP = F_1OP$; arc $G\mathfrak{P} = \mathfrak{P}F_1$; Ebene AB (oder $\lambda$) senkrecht SO, Ebene SOP geht durch S′O, ist also senkrecht $\lambda$; im Punkt $F_2$, wo SO die Kugel trifft, schneiden sich alle sphärischen Lote auf $\lambda$, also geht $G\mathfrak{P}$ durch $F_2$ (bezw. $F_3$) also $\mathfrak{P}F_2 + \mathfrak{P}F_1$ konstant, Ort von $\mathfrak{P}$ die Ellipse, und da $\mathfrak{P}F_1$ und $G\mathfrak{P}$ gleich, so ist der Satz bewiesen. $F_3$ und $F_4$ liegen diametral zu $F_1$ und $F_2$.

Wird der Kegel zum Cylinder, so geht AB durch die Mitte; die Ellipse e wird zur Parabel.

Aufgabe 19. Die sphärischen Kegelschnitte sind die Schnitte eines Kegels, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt, mit der Kugel.

Faſst man die Ebene als Halbkugel mit unendlich groſsem Radius, so ist die Analogie der (semi-) sphärischen und planen Geometrie eine absolute; Zwei Gerade schlieſsen keinen Raum ein; die Länge der Geraden wird $\pi$, entsprechend der Länge $\pi i$ der Lobatschewskischen Geraden. Wir verweisen noch auf Killings einschlägliche Arbeiten.

---

## § 16. Die Gleichung des Punktes in Ebenenkoordinaten.

In den Sätzen von der harmonischen Teilung, dem Menelaus, Ceva etc. tritt wieder, wie in S. S. VIII § 16, das **Prinzip der Dualität** deutlich hervor, nur daſs im Raum sich Punkt und Ebene dual entsprechen. Wie wir bisher den Punkt als Raumelement oder Grundgebilde angesehen haben, können wir jetzt die Ebene als Grundgebilde oder Raumelement betrachten.

Es sei die Gleichung der Ebene $\varepsilon_1$ in Achsenform:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z - 1 = 0,$$

dann ist durch die Werte von a, b, c die Ebene $\varepsilon_1$ ebenso völlig bestimmt, wie ein Punkt durch seine 3 Koordinaten x, y, z; die Gröſsen $a_1 ..$ sind daher Koordinaten der Ebene. Sehen wir in unserer Gleichung die Zeichen x, y, z als Träger aller Zahlenwerte von $-\infty$ bis $+\infty$ an, d. h. als einzeln betrachtet unbeschränkt variabel, aber durch die Gleichung von $\varepsilon_1$ gebunden, so zeigte sich diese Bindung geometrisch darin, daſs der Punkt, der einem Wertsystem $x \dots \{$ war, an die Ebene $\varepsilon_1$ gebunden war. —

Wir können aber ebensogut x, y, z als festgegebene Zahlen $x_1, y_1, z_1$ ansehen und $a_1\, b_1\, c_1$ als Variabeln a, b, c einzeln unbeschränkt variabel, aber durch die Gleichung

$$a x_1 + b y_1 + c z_1 - 1 = 0 = A$$

gebunden, dann stellt diese alle Ebenen dar, welche durch den Punkt $P_1 \{ x_1 \dots$ gehen, und nur diese, d. h.

also A0 ist die Gleichung des Punktes $P_1$ in Ebenenkoordinaten (und zwar in ebenen Achsenkoordinaten) also:

1) $$P_1 \{ a x_1 + b y_1 + c z_1 - 1 = 0.$$

Man sieht also, und darin liegt die analytische Formulierung des Dualitätsprinzips:

Dieselbe Gleichung stellt je nach der Auffassung eine Ebene in Punktkoordinaten oder einen Punkt in Ebenenkoordinaten dar.

Durch Änderung der Auffassung bezw. durch Vertauschung der Punktkoordinaten mit Ebenen ordnet sich dual zu jedem Satz über Punkte und Ebenen ein Satz über Ebenen und Punkte zu, indem sich diese Raumelemente vertauschen. Hierbei entspricht sich die Gerade dual selbst als Verbindung von zwei Punkten oder Schnitt von zwei Ebenen.

Ist die Ebene in Normalform gegeben:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - n = 0,$$

wo zwischen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Gleichung (Aufgabe 10 § 3) $f(\alpha \beta \gamma) = 0$ besteht; so ist es zunächst bequemer, für $-n$ zu setzen $\delta$, dann sind $-\frac{\alpha}{\delta} \dots$ die Achsenkoordinaten; wir haben dann 4 Koordinaten für die Ebene, aber zwischen ihnen besteht die Relation. Die Gleichung des Punktes wird dann $P_1 \{ a x_1 + \dots + \delta = 0$ oder besser in homogener Form

1a) $$P_1 \{ \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0,$$

wo $a : d \dots$ die gewöhnlichen Koordinaten des Punktes $P_1$ sind. Ist $d = 0$, so rückt der Punkt ins Unendliche, aber sobald die Verhältnisse $a : b : c$ bestimmte Werte haben, läfst man ihn in der durch diese Verhältnisse bestimmten Richtung ins Unendliche rücken.

Sieht man von der Relation $f(\alpha \beta \gamma) = 0$ ab, so sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die allgemeinen Ebenenkoordinaten; die Ebene ist dann durch die Verhältnisse $\alpha : \delta, \dots$ bestimmt, wie der Punkt durch $a : d, \dots$

Hat man zwei lineare Gleichungen in Ebenenkoordinaten

$$\alpha a_1 + \dots = 0; \quad \alpha a_2 + \dots = 0,$$

so stellen sie zwei Punkte dar, und damit ihre Verbindungsgerade; die Gerade wird also in Ebenen- wie in Punktkoordinaten bestimmt.

Drei lineare Gleichungen in Ebenenkoordinaten stellen (generaliter) drei Punkte und damit eine Ebene dar, wie drei lineare Gleichungen in Punktkoordinaten drei Ebenen und damit einen Punkt.

Ist
$$a_1 x_1 + \ldots - 1 = 0,$$
d. h. soll der Punkt $P_1$ auf einer gegebenen Ebene liegen, so ist seine Gleichung
$$a x_1 + \ldots - 1 = 0,$$
und wenn man subtrahiert

2) $(a - a_1) x_1 + (b - b_1) y_1 + (c - c_1) z_1 = 0.$

Hat man die Gleichung

2a) $(a - a_1) p + (b - b_1) q + (c - c_1) r = 0,$

wo $a_1$, $b_1$, $c_1$ die Achsenkoordinaten einer bestimmten Ebene $\varepsilon_1$, a, b, c variable Achsenkoordinaten der Ebene bedeuten und p, q, r Konstanten sind, so stellt 2a) einen Punkt $P_1$ dar, der durch die Ebene $\varepsilon_1$ geht, und dessen Koordinaten p, q, r proportional sind.

Aufgabe 1. Die Koordinaten des Punktes $P_1$ zu bestimmen.

$$x_1 = p : u; \; y_1 = q : u; \; z_1 = r : u; \; u = a_1 p + b_1 q + c_1 r.$$

Läfst man a b c bezw. $\alpha \beta \gamma \delta$ unbeschränkt variabel, so stellen sie alle $\infty^3$-Ebenen des Raumes dar; eine Gleichung zwischen den variablen Ebenenkoordinaten, wie $\varphi (a b c) = 0$ oder $\varphi (\alpha \beta \gamma \delta) = 0$, hebt eine $\infty^2$fache Schar heraus, welche im allgemeinen eine Fläche $\varphi$ umhüllen.

Zu bemerken ist, dafs, wenn $\alpha \beta \gamma \delta$ die allgemeinen Koordinaten sind, die Form $\varphi$ homogen sein mufs, d. h. die Summe der Exponenten der Variabeln mufs in jedem Gliede dieselbe sein, oder, anders ausgedrückt, setzt man in $\varphi$ für $\alpha$, $\beta$ ein: $t\alpha$, $t\beta$, ... so ist $\varphi (t\alpha, t\beta, \ldots) = t^n \varphi (\alpha, \beta \ldots)$, so dafs es gestattet ist, in $\varphi = 0$ eine der Variabeln, z. B. $\delta$ gleich 1 zu setzen. Die Zahl n, die konstante Summe der Exponenten, heifst der Grad der homogenen Funktion.

Aufgabe 2. Die Ebenen der Schar $\varphi = 0$, deren Koordinaten sich nur unendlich wenig unterscheiden; die benachbarten Ebenen schneiden sich in Einem Punkt, dem Berührungspunkt.

Es sei $\varepsilon \} a, b, c$ eine Ebene der Schar $\varphi = 0$ und $\varepsilon'$ eine benachbarte, so dafs $\varphi(\varepsilon') = 0$ und $\varepsilon' \} a + h, b + k, c + l \} a', b', c'$, so ist

$$\varphi(\varepsilon') = 0 = \varphi(a', b', c')$$

und wenn man nach Potenzen von h, k, l ordnet, so ist

$$\varphi(a' ..) = \varphi(a ..) + h\,\varphi_a' + k\,\varphi_b' + b\,\varphi_c' + h^2\,\varphi_a'' + \ldots$$

wo $\varphi_a' \ldots$ Abkürzungen für die Koeffizienten von h, k, l, $h^2$ sind, welche deutlich machen, dafs diese Gröfsen h, k, l nicht enthalten.

Da nun $\varepsilon \{ a ..$ zur Schar gehört, so ist $\varphi(a ..) = 0$, also:

$$\varphi(a' \ldots) = h\,\varphi_a' + \ldots h^2 \varphi_a'' + \ldots$$

Sind h, k, l unter jedem Mafs klein, so können $h^2, hk, hl, k^2 \ldots$, kurz die Glieder zweiter Dimension gegen h, k, l vernachlässigt werden, z. B. von $h = 0{,}001$ ist $h^2 = 10^{-6}$, und $\varphi(a' ..) = \varphi(a + h, \ldots)$ reduziert sich auf

I) $$h\,\varphi_a' + k\,\varphi_b' + l\,\varphi_c' = 0,$$

aufser wenn alle drei $\varphi'$ verschwinden.

Es ist I) identisch mit

Ia) $$(a' - a)\,\varphi_a' + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber, wenn $a', b', c'$ frei veränderlich sind, einen Punkt P dar, der auf der Ebene $\varepsilon \{ a \ldots$ liegt, und für dessen Koordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$, da $a\,\varphi_a' + b\,\varphi_b' + c\,\varphi_c'$ eine konstante Zahl u ist,

II) $$\xi = \frac{\varphi_a'}{u};\ \eta = \frac{\varphi_b'}{u};\ \zeta = \frac{\varphi_c'}{u}.$$

Aufgabe 3. Die einem Punkt der Schar $f(x, y, z) = 0$ benachbarten Punkte liegen auf einer Ebene, der Tangentialebene der Fläche $F \{ f(xyz) = 0$ in diesem Punkte.

Der Beweis ist analog dem vorigen, also von Ausnahmen in einzelnen Punkten (in den gleichzeitig $\varphi_a' \ldots$ bezw. $f'x \ldots = 0$ sind) abgesehen, ist die Fläche $\Phi \{ \varphi(a\,b\,c) = 0$ in der Umgebung einer ihrer Ebenen als Punkt, und die Fläche $F \{ f(x, y, z) = 0$ in der Umgebung einer ihrer Punkte als Ebene anzusehen.

Aufgabe 4. Die Fläche $\Phi$ ist generaliter eine Fläche F und v. v.

Die Gleichungen II) gestatten generaliter a b c durch $\xi\,\eta\,\zeta$ auszudrücken; setzt man diese Ausdrücke in $\varphi(a\,b\,c) = 0$, so geht sie in $f(\xi\,\eta\,\zeta) = 0$ über.

Aufgabe 5. Die Fläche $\varphi$ zu bestimmen der Ebenen, welche von einem Punkt $M \{ x_1 \ldots$ den festen Abstand $\pm r$ haben.

Sei das Achsensystem der $x \ldots$ rechtwinklig, und $\varepsilon \{ a \ldots$ eine solche Ebene, dann haben wir nach § 8

$$\frac{a x_1 + b y_1 + c z_1 - 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm r$$

und nach Beseitigung der Wurzel

$$\text{I)}\ \varphi(abc) = (ax_1 + by_1 + cz_1 - 1)^2 - r^2(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Aufgabe 6. Die Fläche F zu finden, welche durch die Gleichung $\varphi = 0$ gesetzt ist. Es ist $\varphi_a' = 2(ux_1 - r^2 a) \ldots$ wo $u = a x_1 + b y_1 + c z_1 - 1$ ist, also

$$\xi = \frac{x_1 u - r^2 a}{u},\ \eta = \ldots,\ \zeta = \ldots$$

also $\xi - x_1 = -\frac{r^2 a}{u}$, und da nach I) $u^2 = r^2(a^2 + b^2 + c^2)$ ist, so ist

$$\text{II)}\ \ f(xyz) = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 - r^2 = 0,$$

d. h. aber:

Die Fläche F ist die Kugel mit Radius r und Centrum M

oder:

Die Gleichung I) ist die Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten.

Aufgabe 5a. Wie 5 und 6, nur beliebiges Achsensystem.

Man wähle Normalebenenkoordinaten, dann ist

$$\alpha x_1 + \ldots + \delta = \pm r$$

die Gleichung der Kugel. Man beseitigt die Zweideutigkeit durch Quadrieren und macht, um F zu finden, die Gleichung

homogen durch Multiplikation von $\varphi$ (a b c) gleich 1 aus § 9, wo a b c der zu $\alpha\,\beta\,\gamma$ gehörige Richtungspunkt.

Aufgabe 7. Umgekehrt aus der Gleichung II) die Gleichung I) herzuleiten.

Aufgabe 8. Die Gleichung der Ebenen, deren Abstände von zwei festen Punkten entgegengesetzt gleich sind.

Wir erhalten bei beliebigem System sowohl der Ebenen- als Punktkoordinaten

$$a x_1 + \ldots = 0; \quad + a x_2 + \ldots = 0; \quad a(x_1 + x_2) + \ldots = 0,$$

d. h. die Fläche $\varphi$ stellt den Mittelpunkt der Strecke $P_1 P_2$ dar.

Aufgabe 9. Die Fläche F bestimmt durch $c_1 a^2 + c_2 b^2 + c_3 c^2 = 1$ bei rechtwinkligen Achsen

$$\xi = c_1 a, \ \eta = c_2 b, \ \zeta = c_3 c, \ \text{da } u = 1, \text{ also}$$

$$F\left\{\frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} = 1.\right.$$

Aufgabe 10. Welches Gebilde entspricht dual einer ebenen Kurve?

Eine ebene Kurve ist bestimmt durch zwei Gleichungen, von denen eine die Gleichung einer Ebene ist

$$\text{I)} \qquad u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1 = 0.$$

Das duale Gebilde erhalten wir, wenn wir die Variabeln x, y, z als die Koordinaten einer Ebene ansehen und die Konstanten u, v, w, als die Koordinaten eines Punktes, dann ist I) die Gleichung eines Punktes, also entspricht dual einer ebenen Kurve ein Gebilde aus Ebenen, bei dem alle Ebenen durch einen festen Punkt gehen, d. h. der ebenen Kurve entspricht dual eine Kegelfläche.

Aufgabe 11. Welches Gebilde entspricht dual einer Kurve im Raume?

Sehen wir die Variabeln als Koordinaten einer Ebene an, so entspricht einer kontinuirlichen Folge von Punkten eine kontinuirliche Folge von Ebenen, von denen je zwei benachbarte sich in einer Geraden schneiden. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet eine geradlinige oder Regel-Fläche, deren Tangentialebenen die erzeugenden Ebenen sind.

## § 17. Die Punktreihe.

Wenn $P_1$ und $P_2$ zwei Punkte, $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ ihre Gleichungen (in Hessescher Form), dann ist

$$1) \qquad u_3 = p_1 - \lambda p_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes $P_3$ auf der Verbindungslinie von $P_1$ und $P_2$, wie man sofort sieht, wenn man $u_3$ in der Form

$$\alpha (x_1 - \lambda x_2) + \ldots \delta (1 - \lambda) = 0$$

schreibt, welches die Gleichung des Punktes $\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \ldots$

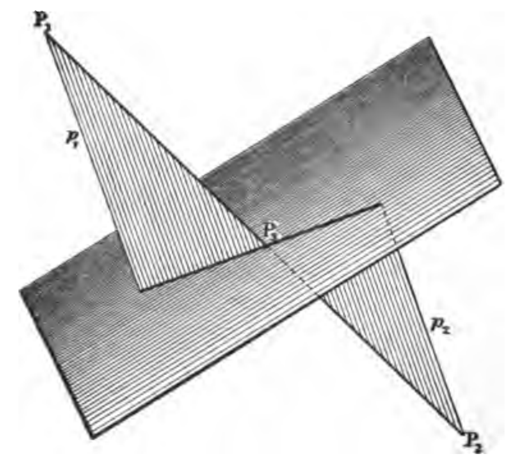



Fig. 27.

ist, der auf $P_1 P_2$ liegt und der $P_1 P_2$ im Verhältnis $\lambda$ teilt, (wobei $\lambda$ negativ wird, wenn $P_3$ innerhalb der Strecke $P_1 P_2$ liegt, und positiv, wenn aufserhalb).

Der Satz läfst sich auch geometrisch nachweisen. Setzt man in die Gleichung eines Punktes p in Hessescher Form die Koordinaten einer ortsfremden Ebene $\varepsilon$ ein, so ist $p_\varepsilon$ der Abstand des Punktes P von der Ebene $\varepsilon$; ist die Gleichung des Punktes P in allgemeiner Form U gegeben, so ist $U_\varepsilon : \mu$ sein Abstand von $\varepsilon$, wo $\mu$ nach § 8 bestimmt

wird. Legt man durch irgend einen Punkt $P_3$ z. B. (Fig. 27) zwischen $P_1$ und $P_2$ irgend eine Ebene, und fällt auf sie von $P_1$ und $P_2$ die Lote, so sind diese $p_1$ und $p_2$ und die Figur zeigt, dafs

$$p_1 : p_2 = P_1 P_3 : P_2 P_3 = \lambda; \; p_1 - p_2 \lambda = 0$$

für alle Ebenen durch $P_3$ und nur für diese, wo $\lambda$ das Teilungsverhältnis von $P_1 P_2$ durch $P_3$ ist. Für innere Punkte ist $\lambda$ negativ, weil sowohl die Lote als die Strecken $P_1 P_3$ und $P_2 P_3$ entgegengesetzt gerichtet sind, für äufsere positiv, somit ist 1) die Gleichung des Punktes $P_3$.

Sind $P_1$ und $P_2$ in allgemeiner Form $u_1$ und $u_2$ gegeben, so sind die Lote $u_1 : \mu$ und $u_2 : \mu$, aber ihr Verhältnis $u_1 : u_2$ ist $P_1 P_3 : P_2 P_3$, also gleich $\lambda$, somit

1a) $$u_3 = u_1 - \lambda u_2 = 0$$

die Gleichung des Punktes P.

Durchläuft $\lambda$ alle möglichen Werte, so bekommen wir alle Punkte P auf der Geraden $P_1 P_2$. Für $\lambda = 0$ ist $P \equiv P_1$; für $\lambda = \infty$ setzen wir fest, dafs $P \equiv P_2$ sei. Die Gesamtheit aller dieser Punkte heifst (S. S. VIII, S. 63) Punktreihe, die Zahl $\lambda$ heifst der Parameter, die Gerade selbst der Träger der Punktreihe.

Ist $\lambda = -1$, so liegt P in der Mitte der endlichen Strecke $P_1 P_2$; ist $\lambda = +1$, so liegt P in der Mitte der unendlichen Strecke $P_2 P_1$, d. h. im Unendlichen (in $\Omega$ S. S. VIII).

Ist $P_4 \{ p_1 - \mu p_2 = 0$, bezw. $\{ u_1 - \mu u_2 = 0$, so ist $\lambda : \mu$ wieder das Doppelverhältnis (anharmonische, S. S. VIII) der vier Punkte, und ist $\lambda + \mu = 0$, so sind die vier Punkte harmonisch, ausgezeichnet ist darunter das System, welches aus zwei Punkten, dem Mittelpunkt ihrer Strecke und dem unendlich fernen besteht; es entspricht dem System zweier Ebenen und ihrer Halbierungsebenen.

Aufgabe 1. Das Doppelverhältnis von vier beliebigen Punkten einer Punktreihe zu bestimmen.

Dieselbe Rechnung wie in Aufgabe 1. § 14 ergiebt dasselbe Resultat. Allgemein ist klar, dafs wegen der völligen Übereinstimmung der Gleichungen alle Folgerungen bestehen bleiben, und wir die betreffenden Sätze durch Vertauschung von „Punkt“ und „Ebene“ erhalten, worin eben das Dualitätsprinzip liegt.

Auch die Lehre von der projektiven Beziehung des ersten Teils (§ 16; § 32 etc.) bleibt fast unverändert. Ebenenbüschel und Ebenenbüschel, bezw. Punktreihe und Punktreihe, bezw. Punktreihe und Ebenenbüschel sind projektiv zugeordnet, wenn von je zwei Grundelementen aus sich dieselben Doppelverhältnisse bestimmen lassen, also z. B. die Büschel definiert sind durch $U_1 - \lambda U_2$ und $V_1 - \lambda V_2$; bezw. die Punktreihe durch $v_1 - \lambda v_2$ d. h. also je vier harmonischen Elementen des neuen Gebildes vier harmonische des andern entsprechen. Wir verweisen auf S. S. VIII (die Beweise bleiben wörtlich), bezw. auf Reyes grundlegendes Werk: Geometrie der Lage und stellen nur als

Aufgabe 2. Im linearen Komplex sind die Punktreihe, die ein Punkt als Pol beschreibt, und das Ebenenbüschel seiner Polaren projektiv.

Sind $x_1$; $x_2$; $x_1 - \lambda x_2$; $x_1 - \mu x_2$, die vier Punkte, so sind nach Gleichung 8 § 13 $U_1 = \dfrac{D_1 + d_2 z_1 - d_3 y_1}{D_1 x_1 + D_2 y_1 + D_3 z_1}$ etc. die Koordinaten der polaren Ebenen, und die Rechnung ergiebt, wenn $u_1 = v_1 : N_1$ gesetzt wird:

$$u_3 = \frac{v_1 - \lambda v_2}{N_1 - \lambda N_2}; \quad u_4 = \frac{v_1 - \mu v_2}{N_1 - \mu N_2};$$

also, da $\varepsilon_1 \{ v_1 x + w_1 y + t_1 z - N_1$, $\varepsilon_2 \{ v_2 x + \ldots.$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 - \lambda \varepsilon_2; \; \varepsilon_4 = \varepsilon_1 - \mu \varepsilon_2.$$

Der lineare Komplex ist also ein spezieller Fall der projektiven Zuordnung von Punkten und Ebenen oder w. d. i., der gegenseitig eindeutigen Zuordnung von Punkten und Ebenen.

Diese drückt sich analytisch aus durch das Gleichungssystem u, v, w (Achsenkoordinaten)

$$\begin{aligned}
\zeta u &= a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14}; \\
\zeta v &= a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} \\
\zeta w &= a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34}; \\
-\zeta &= a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44}.
\end{aligned}$$

Der lineare Komplex ist derjenige spezielle Fall, bei dem Punkt und Ebene in einander liegen, also $ux + vy + wz + 1 = 0$.

Multiplizieren wir die Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z, 1 und addieren, so erhalten wir

$$0 = a_{11} x^2 + (a_{12} + a_{21}) x y + \ldots\ldots + (a_{14} + a_{41}) x + \ldots a_{44} = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes System x, y, z erfüllt sein soll, so müssen die Koeffizenten verschwinden, also:

$$3)\ a_{11} = 0,\ a_{22} = 0,\ a_{33} = 0,\ a_{44} = 0;\ a_{ik} + a_{ki} = 0.$$

Das ist aber die Eigenschaft der Gleichungen, welche die u aus den x bestimmen; damit ist also bewiesen, dafs der linare Komplex der einzige Spezialfall der projektiven Beziehung ist, bei der Punkt und zugeordnete Ebene in einander fallen. Wegen der Gleichungen 3) bezeichnet man daher diese Art der Zuordnung als Nullsystem.

## V. Abschnitt.

# Die Koordinatentransformation.

---

## § 18. Die Koordinatentransformation.

Verlegt man nun den Nullpunkt ohne Richtungsänderung des Achsensystems, und sind die alten Koordinaten x . . ., die neuen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und hat der neue Nullpunkt die alten Koordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$, so war

$$1) \qquad x = \xi + x_0 \ldots; \; \xi = x - x_0, \ldots$$

Von dieser Parallelverschiebung (die zugleich als eine Parallelverschiebung des Raumes aufgefafst werden kann) haben wir schon Gebrauch gemacht, z. B. zur Bestimmung des Abstands zweier Punkte.

Transformation eines rechtwinkligen Achsensystems in ein rechtwinkliges mit Beibehaltung des Nullpunkts. Es mögen die neuen $\xi$-Achsen mit den alten Achsen der Reihe nach die Winkel $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, bilden, etc. und die Kosinuszeichen weggelassen werden, dann haben wir das System

$$2) \; \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{und} \quad 2a) \; \begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2 \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots &= 0 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \ldots\ldots\ldots &= 0 \end{aligned}$$

Das System 2a) drückt aus, dafs auch die neuen Achsen aufeinander senkrecht stehen. Da die alten Achsen mit den neuen die Winkel $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta_1 \ldots$, $\gamma_1 \ldots$ bilden, so haben wir ohne Rechnung aus 2 und 2a (da die Begriffe „alt und neu“ relativ)

$$3) \; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \text{ etc.} \quad 3a) \; \alpha_1 \beta_1 + \ldots. = 0;$$
$$\alpha_1 \gamma_1 + \ldots. 0, \; \beta_1 \gamma_1 + \ldots. 0.$$

Die Hessesche Gleichung der $\eta$-Ebene ist in alten Koordinaten

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0.$$

Setzt man darin die Koordinaten des beliebigen Punktes P ein, so ist sein Abstand von dieser Ebene durch die linke Seite in alten Koordinaten ausgedrückt, während er in neuen gleich $\eta$ ist, somit haben wir die Transformationsgleichungen

4) $$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$\eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$\zeta = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

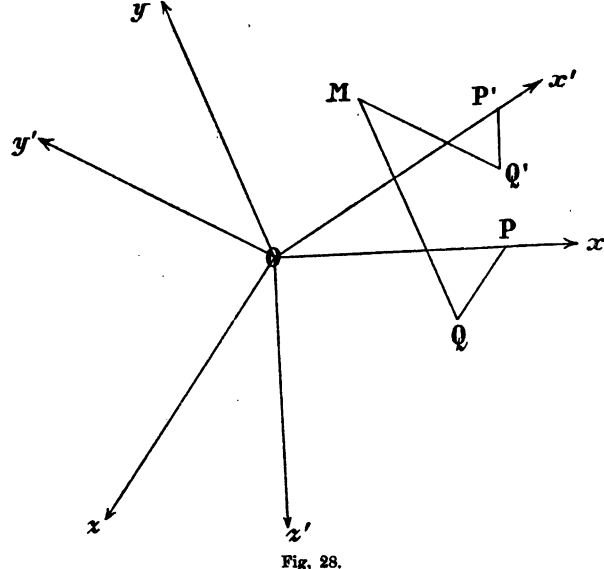



Fig. 28.

Genau in derselben Weise erhalten wir ohne Rechnung

5) $$x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta; \ldots .$$

Dies System kann auch aus 4) abgeleitet werden, dadurch, dafs wir die Gleichungen des Systems der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3$; multiplizieren und addieren und die Formeln 3a) anwenden, dann mit $\beta, \ldots$ etc.

Man unterscheidet zwei Arten von Transformationen; entweder kann das neue System durch Drehung

des alten erhalten werden, oder nicht. Läfst man nämlich das Achsensystem unverändert, vertauscht aber die positive und negative Richtung auf allen drei Achsen, so kann das alte System mit dem neuen **nicht** durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Die Systeme sind nicht kongruent, sondern symmetrisch, wie auf der Kugel ein sphärisches Dreieck und das Dreieck seiner Gegenpunkte. Zu jedem Achsensystem, mit dem man das alte durch Drehung zur Deckung bringen kann, gehört also immer eins, für das die Kongruenz nicht möglich.

**Aufgabe 1.** Die Formeln 4 bezw. 5 durch den Projektionssatz: „Die Projektion eines geschlossenen Umrisses auf irgend eine Gerade ist Null" abzuleiten. Man projiziere den geschlossenen Linienzug OPQMO auf OX′ bezw. OP′Q′MO auf OX. Fig. 28.

**Aufgabe 2.** Zu beweisen: $[\beta_2 \gamma_3] = \varepsilon \alpha_1$; $[\beta_3 \gamma_1] = \varepsilon \alpha_2$; $[\beta_1 \gamma_2] = \varepsilon \alpha_3$; ... $[\gamma_2 \alpha_3] = \varepsilon \beta_1$ ... wo $\varepsilon = \pm 1$.

Der erste Teil der Behauptung ergiebt sich unmittelbar aus je zwei der Gleichungen 3a) bezw. 3); der zweite daraus dafs

$$[\beta_2 \gamma_3]^2 + [\beta_3 \gamma_1]^2 + [\beta_1 \gamma_2]^2 = [\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2](\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2).$$

**Die beiden Arten der Transformation unterscheiden sich analytisch also dadurch, dafs bei der ersten $\varepsilon = +1$, bei der zweiten $\varepsilon = -1$; bezw. die Determinante $\alpha_1 [\beta_2 \gamma_3] + \ldots = +1$ oder gleich $-1$.**

**Aufgabe 3.** Die Gleichung 3) herzuleiten durch folgende Betrachtung. Da jeder Punkt seine Koordinaten und jedes Tripel von Koordinaten seinen Punkt bestimmt, so müssen die alten Koordinaten linear durch die neuen und die neuen linear durch die alten ausdrückbar sein. Wir haben:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14} \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24} \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_{34} \end{aligned}$$

Da der Anfangspunkt unverändert, so sind $a_{14}$; $a_{24}$; $a_{34}$ alle 0, für die $\xi$-Achse ist $\eta = 0$, $\zeta = 0$, also $x = a_{11}\xi$, $y = a_{21}\xi$, $z = a_{31}\xi$, also $a_{11} = \alpha_1$; $a_{21} = \beta_1$; $a_{31} = \gamma_1$ etc. **Diese Methode ist im Prinzip die einfachste.**

**Aufgabe 4.** Die 9 Konstanten der Transformationsgleichungen, zwischen denen die 6 Gleichungen 2 bezw. 3

bestehen, durch drei Parameter auszudrücken. Die Aufgabe ist an sich auf mehrfache Weise lösbar, wir leiten hier die Eulerschen Formeln ab und nehmen an, die Transformation sei erster Art. Es seien Fig. 29 $OXYZ$; $OX'Y'Z'$ die zwei Koordinaten-Dreikante; Der Winkel $YOY'$ sei $\psi$ (der frühere $\beta_2$), der positive Strahl $OS$ der Schnittlinie der alten und neuen y-Ebene mache mit $+x$ den Winkel $\varphi$, so dafs, wenn man das alte Dreikant um die y-Achse dreht, $+X$ sich mit $OS$ deckt und $OZ$ nach $OZ_1$ kommt und $OZ_1 \perp OS$; dreht man dann das System um die Achse

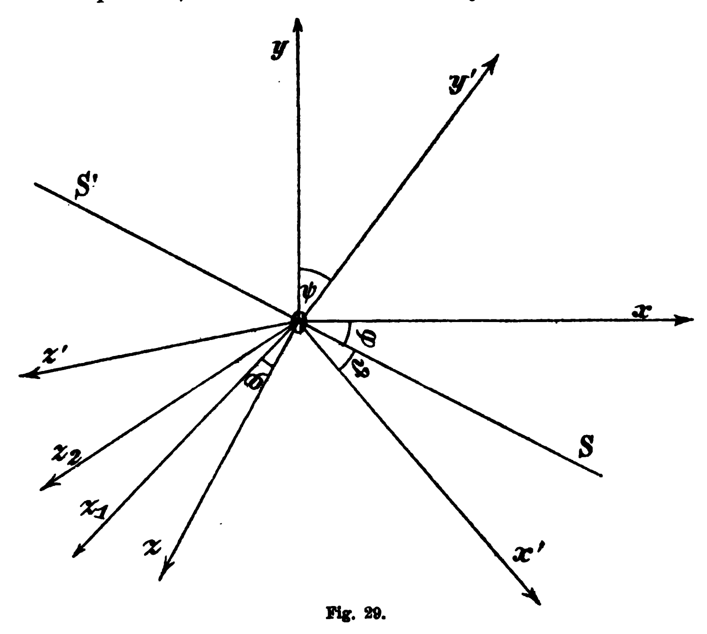



Fig. 29.

$OS$, um den Winkel $\psi$, so kommt $OY$ nach $OY'$, $OZ_1$ bleibt in der Ebene $YOY'$ und gelangt nach $OZ_2$; dreht man jetzt das Dreikant um die Achse $OY'$ so dafs $OS$ nach $OX'$ kommt, um den Winkel $SOX'$ oder $\vartheta$, so fällt $OZ_2$ auf $OZ'$.

Man hat also hintereinander drei plane Koordinaten-Transformationen auszuführen.

Bezeichnet man das erste System durch die Marke 1,

das zweite durch die Marke 2, so hat man für die Drehungen $\varphi$, $\psi$, $\vartheta$ nach S. S. VIII:

$$y = y_1;\ x = x_1 \cos\varphi - z_1 \sin\varphi;$$
$$z = x_1 \sin\varphi + z_1 \cos\varphi$$
$$x_1 = x_2;\ z_1 = z_2 \cos\psi - y_2 \sin\psi;$$
$$y_1 = z_2 \sin\psi + y_2 \cos\psi$$
$$y_2 = y';\ x_2 = x' \cos\vartheta - z' \sin\vartheta;\ z_2 = x' \sin\vartheta + z' \cos\vartheta$$

und nach Elimination der Hilfsgröfsen $x_1, x_2 \ldots$

$$6)\ x = x'(\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta\cos\psi) + y'\sin\varphi \sin\psi - z'(\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi)$$
$$y = x'\sin\vartheta\sin\psi + y'\cos\psi + z'\sin\psi\cos\vartheta$$
$$z = x'(\sin\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi) - y'\cos\varphi \sin\psi - z'(\sin\varphi\sin\vartheta - \cos\psi\cos\vartheta\cos\psi)$$

aus dem Vergleich von 5) mit 6) ergeben sich die Werte der $\alpha, \beta, \gamma$.

Aufgabe 5. Die Gleichungen 6) für den Fall, dafs $\alpha_2 = 90^0$ bezw. $\vartheta = 0$.

Aufgabe 6. Die Transformation eines beliebigen Achsensystems $\lambda\mu\nu$ in ein anderes mit gleichem Nullpunkt.

Die Richtungspunkte der drei neuen Achsen seien $a_1\, b_1\, c_1;\ a_2 \ldots a_3 \ldots$

Die dritte Methode (Aufgabe 3) giebt dann ohne weiteres

$$7)\qquad \begin{aligned} x &= a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \\ y &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta \\ z &= c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{aligned}$$

wo $\varphi(a_1\, b_1\, c_1) = 1$, $\varphi(a_2\, b_2\, c_2) = 1$, $\varphi(a_3\, b_3\, c_3) = 1$ (vgl. § 9 S. 43).

Aufgabe 7. Die Transformation durch die Projektionsmethode auszuführen

$$x + y\nu + z\mu = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \text{ etc.}$$

Aufgabe 8. Die erste Methode auf beliebige Systeme anzuwenden.

Die Gleichung einer Ebene, welche in O auf der alten x-Achse senkrecht steht, ist in neuen Koordinaten $\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta = 0$ und in alten Koordinaten $x + y\nu + z\mu = 0$ also

$$x + y\nu + z\mu = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta$$

ebenso erhält man

$$\xi + \eta \nu' + \zeta \mu' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \ldots .$$

Die ganz allgemeine Koordinatentransformation, bei der aufser der Richtung der alten Achsen noch der Anfangspunkt verlegt wird, läfst sich auffassen als Parallelverschiebung und Richtungsänderung. Man braucht daher nur zu den Formeln 7) die alten Koordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ des neuen Nullpunkts 0′ hinzuzufügen.

Von der Transformation eines schiefen Systems in ein schiefes System wird selten oder nie Gebrauch gemacht, wohl aber von der eines schiefen in ein rechtwinkliges System. Dann sind $\lambda', \nu', \mu'$ Null; $\alpha_1 a_2 + \beta_1 b_2 + \gamma_1 c_2 = 0$; $\alpha_2 a_3 + \ldots = 0$; $\alpha_3 a_1 + \ldots = 0$.

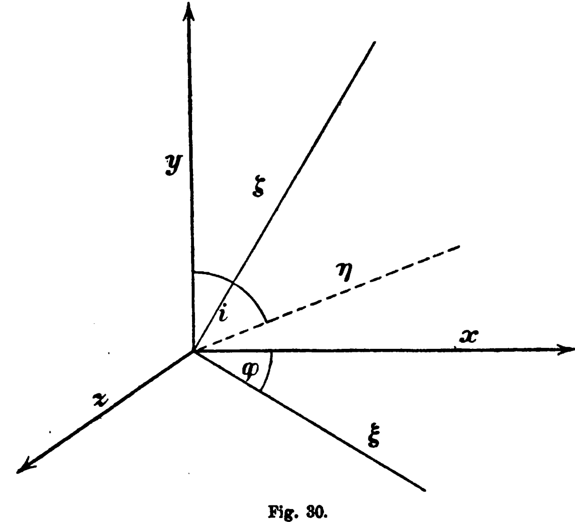


Fig. 30.

Aufgabe 9. Von einem rechtwinkligen System auf ein planes rechtwinkliges System mit gleichem Nullpunkt überzugehen.

Wir behandeln einen Spezialfall. Die neue x-Achse sei die Schnittlinie der Ebene, die wir als y-Ebene wählen, mit der alten y-Ebene. Der allgemeine Fall läfst sich auf diesen Fall und eine Drehung in der Ebene zurückführen. Wir betrachten nur Punkte der gegebenen Ebene, setzen also

$\eta = 0$. Nennen wir den Neigungswinkel der Ebene mit der y-Ebene (Fig. 30) i (und ebenso cos i) und den Winkel der $\xi$- und x-Achse $\alpha$ (identisch mit $\varphi$), so ist:

$\alpha_1 = \alpha$; $\beta_1 = 90$, $\gamma_1 = 90 - \alpha$; $\cos \alpha_2$ (bezw. $\alpha_2$) $= \cos 90 \cos \alpha + \sin \alpha \sin 90 \sin i = \sin \alpha \sin i$ (Dreikant $\xi \eta x$), $\beta_2 = i$;

$$\gamma_2 \text{ (aus Dreikant } \eta z \xi) = -\alpha \sin i;\ \alpha_3 = -i \sin \alpha;$$
$$\beta_3 = 90 - i,\ \gamma_3 = i\,.\,\alpha$$

daher

$$8)\quad x = \alpha \xi - i \sin \alpha \zeta;\ y = \sin i \zeta;\ z = \sin a \xi + i \alpha \zeta.$$

Man kann das Resultat verifizieren, indem man in den Eulerschen Formeln $\vartheta = 0$ setzt ($\nu' \eta' = 0$); $\varphi = \alpha$, $\psi = i$.

Aufgabe 10. Den Schnitt der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ mit der Ebene $\alpha$, i. Die Substitution 8) ergiebt: $\xi^2 + \zeta^2 = r^2$.

Aufgabe 11. Die Fläche $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1$ so durch eine Ebene, welche durch O gelegt ist, zu schneiden, dafs der Schnitt ein Kreis wird. Man erhält: $\sin 2\alpha \cos i = 0$; $\cos 2\alpha\, (\lambda_1 - \lambda_3) = \sin^2 i\, (\lambda_2 - \lambda_1 \sin^2 \alpha - \lambda_3 \cos^2 \alpha)$. Ist $\lambda_1 = \lambda_3$, so ist $i = 0$, $x = 0$, aufser wenn $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_3$, in welchem Falle i und $\alpha$ unbestimmt bezw. beliebig. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_3$, so ist entweder

$$\sin \alpha = 0,\ \alpha = 0^0;\quad \cos^2 i = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}$$

oder

$$\cos \alpha = 0,\ \alpha = 90^0;\ \cos^2 i = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

oder

$$\cos i = 0,\ i = 90^0;\ \cos^2 \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Es giebt also drei Paar Kreisschnitte, von denen aber nur eins reell ist.

Aufgabe 12. Die Fläche $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2pz = 0$ so durch eine Ebene in O zu schneiden, dafs man eine Parabel erhält.

Die Bedingung (S. S. VIII S. 124) $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ giebt entweder $\alpha = 0$, also jede Ebene durch die z-Achse, oder $i = 0$, d. h. die y-Ebene. Ist $\lambda_2 = 0$, so ist jeder Schnitt eine Parabel.

Aufgabe 13. Dieselbe Fläche durch eine Ebene durch O in einem Kreis zu schneiden.

Wir erhalten 1) $i = 0$ also $\sphericalangle i = 90^0$, $\alpha^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; 2) $\sin \alpha = 0$, $\sin^2 i = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; 3) $\alpha = 0$, $\mathrm{tg}^2 \vartheta = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2}$, dann ist der Schnitt eine Gerade (die sowohl als Parabel wie als Kreis angesehen werden kann).

**Aufgabe 14.** Gegeben das Achsensystem $\lambda = \mu = \nu = 60^0$, es soll in ein rechtwinkliges Achsensystem transformiert werden mit gleichem Nullpunkt, und so, dafs jede Achse in der Symmetrieebene zu den beiden anderen um den gleichen Winkel gedreht wird.

Der Winkel, welchen die Symmetrieachse des gleichseitigen Dreikants von $60^0$ mit jeder Kante einschliefst, ist gegeben durch $\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$; der entsprechende Winkel des gleichseitig rechtwinkligen Dreikants ist $90 - \varphi$, derselbe Neigungswinkel des ersten Dreikants ist ebenfalls $\varphi$; also:

$$\cos x\xi = \frac{2}{3}\sqrt{2};\quad \cos y\xi = \frac{1}{6}\sqrt{2};\quad \cos z\xi = \frac{1}{6}\sqrt{2};$$

$$\cos x\eta = \frac{1}{6}\sqrt{2};\quad \cos y\eta = \frac{2}{3}\sqrt{2};\quad \cos z\eta = \frac{1}{6}\sqrt{2};$$

$$\cos x\zeta = \frac{1}{6}\sqrt{2};\quad \cos y\zeta = \frac{1}{6}\sqrt{2};\quad \cos z\zeta = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

**Aufgabe 15.** Ein rechtwinkliges Achsensystem in ein anderes zu transformieren, so dafs jede neue Achse mit der betreffenden alten Achse einen Winkel von $60^0$ einschliefst und in die zugehörige winkelhalbierende Ebene hineinfällt, und die Winkel des neuen Systems zu berechnen.

**Aufgabe 16.** Ein rechtwinkliges Achsensystem in ein rechtwinkliges so zu transformieren, dafs jede neue Achse mit der betreffenden alten einen Winkel von $60^0$ einschliefst.

Wir erhalten $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \frac{1}{2}$; $\alpha_2 = \beta_3 = \gamma_1$; $\alpha_3 = \beta_1 = \gamma_2$; $\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2}$; $\alpha_2 \alpha_3 = \frac{-1}{4}$; $\alpha_2 = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$; $\alpha_3 = \frac{1}{4}(1 \mp \sqrt{5})$.

**Aufgabe 17.** Wie 15) mit Benutzung der Eulerschen Formeln.

**Aufgabe 18.** Das System $\lambda = \mu = \nu = 60^0$ so zu transformieren, dafs $\lambda' = \mu' = \nu' = 60^0$; die neue y-Achse mit der alten x- und der alten y-Achse Winkel von $60^0$ bildet, die neue x-Achse desgl. mit der alten x- und der alten y-Achse und beide neuen Achsen im alten Oktanten $+++$ liegen.

**Aufgabe 19.** Transformation der Koordinaten einer Ebene durch Übergang auf ein Achsensystem mit dem alten Nullpunkt.

Ist die Gleichung der Ebene $\varepsilon$ im alten System

$$\varepsilon \left\{ u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 = 0 \right.$$

und im neuen

$$\varepsilon \left\{ v_1 x' + v_2 y' + v_3 z' + v_4 = 0, \right.$$

so ergiebt sich durch Benutzung von 7) und Identifizierung der beiden Gleichungen von $\varepsilon$

$$9) \quad u_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3;\ u_2 = b_1 v_1 + \ldots; \\ u_3 = c_1 v_1 + \ldots;\ u_4 = v_4.$$

Wenn man sich auf Drehung beschränkt, ist die Transformation der Ebenenkoordinaten der Transformation der Punktkoordinaten völlig gleichartig.

**Aufgabe 20.** Transformation der Ebenenkoordinaten durch Parallelverschiebung nach $x_0 \ldots$ Ist

$$\varepsilon \left\{ u_1 x + \ldots + u_4 = 0, \right.$$

so erhalten wir

$$\varepsilon \left\{ u_1 x' + u_2 y' + u_3 z' + v_4 \right.$$

wo

$$v_4 = u_1 x_0 + u_2 y_0 + u_3 z_0 + u_4.$$

**Aufgabe 21.** Beliebige Transformation der Ebenenkoordinaten.

Resultate wie in Aufgabe 19), nur für $v_4$ das Resultat aus Aufgabe 20. Die Änderung, welche die Ebenenkoordinaten gegenüber den Punktkoordinaten bei Parallelverschiebung bezw. Verlegung des Anfangspunktes erleiden, ist der Anlafs gewesen, das dreiachsige Koordinatensystem zu Gunsten eines homogenen Systems, das den Dreiecks-

koordinaten in der Ebene entspricht, also zu Gunsten von Tetraederkoordinaten, zu verlassen.

Man betrachtet dabei als Koordinatenebenen die vier Ebenen eines (Fundamental-) Tetraeders und setzt als die vier Koordinaten eines Punktes vier Zahlen, welche den mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Abständen von den vier Koordinatenebenen proportional sind, es sind dann

Aufgabe 22. Die Tetraederkoordinaten eines Punktes durch seine rechtwinkligen auszudrücken.

Aufgabe 23. Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes auf seine Tetraederkoordinaten zurückzuführen.

Beide Aufgaben machen dem mit Determinantenrechnung Vertrauten keine Schwierigkeit.

Als homogene (Tetraeder-) Ebenenkoordinaten werden dann vier Zahlen gewählt, die sich verhalten wie die Koeffizienten der Variabeln in der auf Tetraederkoordinaten transformierten Gleichung der Ebene. Die geometrische Bedeutung dieser Koordinaten entspricht der der Punktkoordinaten, sie sind den mit konstanten Zahlen multiplizierten Abständen der Ecken des Fundamentaltetraeders von der betreffenden Ebene proportional.

Alle Transformationsgleichungen haben das gemeinsam, dafs die alten Koordinaten durch die neuen, die neuen durch die alten linear ausdrückbar sind; der Grad einer Gleichung $f(xyz) = 0$ bezw. $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ oder $\varphi(uvw) = 0$ bezw. $\varphi(u_1 .. u_4) = 0$ wird also durch eine Koordinatentransformation nicht geändert. Ist $f(xyz) = 0$ algebraisch und vom n. Grade, so sagen wir, die Fläche $F\}f = 0$ ist vom n. Grade und algebraisch und beweisen den Satz:

Eine algebraische Fläche n. Grades, eine $F^n$, hat mit keiner Geraden, die nicht ganz auf ihr liegt, mehr als n Punkte gemein.

Ist g eine beliebige Gerade, so kann man die Koordinaten so transformieren, dafs g zu einer Achse wird, z. B. zur $\xi$-Achse, nach der Transformation kann der Grad von $\xi$ in $f_1(\xi\eta\zeta)$ nicht n übersteigen, und wird im allgemeinen n sein. Setzen wir nun $\eta = 0$, $\zeta = 0$, so erhalten wir eine Gleichung n. Grades $f_1(\xi 0 0) = 0$, welche mit $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die n. Punkte giebt, in denen die $\xi$-Achse, d. i. g, die Fläche F

schneidet. Zählen wir, wie in der Algebra, zusammenfallende, imaginäre und unendlich grofse Lösungen, so haben wir den Satz: jede $F^n$ wird von jeder Geraden in n Punkten geschnitten. Ein Gebilde von Ebenen, das durch die Gleichung $\varphi(u, v, w)$ bezw. $\varphi(u_1 \ldots u_4) = 0$ dargestellt wird, nennen wir mit Reye $\varphi^n$; ist $\varphi$ vom n. Grade oder richtiger von der n. Dimension in den Variabeln, so heifst $\varphi^n$ eine Fläche n. Klasse und wir beweisen den dualen Satz:

Auf keiner Geraden, die nicht ganz in $\varphi^n$ liegt, liegen mehr als n Ebenen der Fläche.

Aufgabe 24. Die beiden letzten Sätze unabhängig von der Koordinatentransformation zu beweisen.

Wir beweisen den zweiten Satz. Seien $u_1^0 \ldots u_4^0$ und $u_1' \ldots u_4'$ zwei Ebenen von g, so ist jede andere dargestellt durch $u_1^0 + \lambda u_1' \ldots$ und die Ebenen des Gebildes, welche durch g gehen, erhält man, wenn $\lambda$ aus der Gleichung $\varphi(u_1^0 + \lambda u_1' \ldots) = 0$ bestimmt wird. Dies ist aber für $\lambda$ eine Gleichung n. Grades, welche entweder n oder unzählig viele Lösungen hat, d. h. identisch für jedes $\lambda$, d. h. für alle Ebenen von g erfüllt ist.

## VI. Abschnitt.

# Die Kugel.

### § 19. Die Gleichung der Kugel, Potenzsatz.

Die Kugel wird definiert als Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkte $M\{\xi, \eta, \zeta$, dem Mittelpunkt, die gegebene Entfernung r haben, dann ist bei rechtwinkligem System:

$$1)\quad K\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-r^2=0$$

und bei beliebigen System (vgl. § 2 Aufgabe 1, § 5. Aufgabe 1)

$$1a)\quad K\{(x-\xi)^2+\ldots+2(x-\xi)(y-\eta)\cos\nu+\ldots$$
$$-r^2=0=\varphi(x-\xi\ldots)-r^2=0$$

die Gleichung der Kugel in Punktkoordinaten.

Setzt man in K die Koordinaten eines ortsfremden Punktes P, so ist $K_p = MP^2 - r^2$.

Zieht man durch $P\{x_0 \ldots$ eine Gerade g, welche die Richtungskoordinaten a, b, c, hat, so sind ihre Gleichungen nach § 9, Formel 2b)

$$x = x_0 + \lambda a;\; y = y_0 + \lambda b;\; z = z_0 + \lambda c,$$

wo $\lambda$ den Abstand des laufenden Punktes von P bezeichnet.

Die Schnittpunkte dieser Geraden g mit der Kugel K erhält man, wenn man diese Werte in $K=0$ einsetzt, und die dadurch bestimmten $\lambda$ berechnet.

Da diese Aufgabe häufig wiederkehrt, wollen wir sie allgemein für alle Flächen zweiten Grades erledigen.

Es sei f (xyz) eine Form zweiten Grades, sie besteht aus Gliedern zweiten Grades, ersten Grades und einer Konstanten. Wir machen f(xyz) homogen, indem wir eine

Hilfsvariabel $x_4$ einführen und setzen $x=\frac{x_1}{x_4}$; $y=\frac{x_2}{x_4}$; $z=\frac{x_3}{x_4}$; (es entspricht dies dem Übergang auf Tetraederkoordinaten), setzen wir $x_4=1$, so sind $x_1$ etc. mit $x\,y\,z$ identisch. Nach Multiplikation mit $x_4^2$ ist dann

$$\begin{aligned} x_4^2 f(x\,y\,z) = \alpha_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 \\ + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{33} x_3^2 + 2a_{34} x_3 x_4 \\ + a_{44} x_4^2 \end{aligned}$$

oder kürzer, wenn wir $x_4=0$ ausschliefsen,

$$f(x\,y\,z) \} \Sigma a_{ik} x_i x_k \{ f(x_1 \ldots x_4) \} f(x_i)$$

wo die Indices i und k alle Werte von 1 bis 4 durchlaufen und $a_{ik}=a_{ki}$ ist.

Setzt man in $f(x_i)$ für $x_i$ ein: $x_i+\xi_i$ und ordnet nach Potenzen der $\xi_i$ so ist

$$f(x_i+\xi_i) = A + \Sigma B_i \xi_i + \Sigma C_{ik} \xi_i \xi_k$$

Sind alle $\xi=0$, so ergiebt sich $A=f(x_i)$. Sind alle $x=0$, so mufs $f(\xi_i)=\Sigma a_{ik}\xi_i\xi_k \equiv \Sigma C_{ik}\xi_i\xi_k$ sein, also

$$C_{ik}=a_{ik}$$

Ist $\xi_i=x_i$, so ist $f(x_i+\xi_i)=f(2x_i)=4f(x_i)$, somit

$$\Sigma x_i B_i = 2f(x_i)$$

und

$$B_i = 2(x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + x_3 a_{i3} + x_4 a_{i4}) = 2\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k,$$

wo i fest; d. h. man erhält $2B_i$, wenn man in der homogenen Form $f(x_i)$ die Zahl $x_i$ vor die Klammer nimmt als den zugehörigen Faktor. Man bezeichnet diesen Faktor mit $\frac{1}{2}f'(x_i)$ auch $\frac{1}{2}f'x_i$ also

$$2)\quad \begin{aligned} f(x_i+\xi_i) = f(x_i) + \Sigma \xi_i f'(x_i) + f(\xi_i) = f(x_i) \\ + \Sigma x_i f'(\xi_i) + f(\xi_i) \end{aligned}$$

Ist $\xi_i = t\,v_i$, so ist

$$2a)\quad f(x_i+t\,v_i) = f(x_i) + t\,\Sigma x_i f'(v_i) + t^2 f(v_i).$$

Das Resultat unsrer Einsetzung in $K=0$ erhalten wir, wenn wir $x_4=1$ und $v_4=0$, und $t=\lambda$ setzen also

$$3)\quad \begin{aligned} K(x_0+\lambda a \ldots) = K(x_0 \ldots) + 2\lambda(a\,\varphi' x_0 - \xi +) \\ + \lambda^2 \varphi(a, b, c) = 0. \end{aligned}$$

Der Faktor von $\lambda^2$ ist nach § 5 Aufgabe 1 gleich 1. Wir haben also für $\lambda$ eine Gleichung zweiten Grades, die Kugel gehört also zu den Flächen zweiten Grades (nach Reye: $F^2$) oder Quadriks, sie wird von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten.

Nennen wir die beiden Wurzeln der Gleichung 3) $\lambda_1$ und $\lambda_2$ und bezeichnen die betreffenden Punkte in denen die Gerade g die Kugel schneidet mit P und Q, so ist nach den Sätzen über die quadratische Gleichung (Schubert, Arithmetik S. 154).

$$4)\qquad \lambda_1 \lambda_2 = PQ.\ PR = K(x_i^0)$$
$$= MP^2 - r^2 = (MP + r)(MP - r),$$

d. h. der Potenzsatz S. S. VIII S. 86 gilt auch für die Kugel, oder

Das Produkt der Abschnitte aller Kugelsehnen durch denselben Punkt ist konstant.

Dieser konstante Wert heifst: Die Potenz der Kugel in diesem Punkt. Setzt man in die Gleichung der Kugel 1a) die Koordinaten eines ortsfremden Punktes, so erhält man die Potenz der Kugel in diesem Punkt.

Aufgabe 1. Ort der Punkte in denen die Kugel die gegebene Potenz p hat.

Aufgabe 2. Wie ist die Potenz der Kugel in Punkten des Innern? untere Grenze der Potenz?

Aufgabe 3. Rechtwinkliges System $\xi = \eta = \zeta = 0$; Schnittpunkte der Geraden $x = r + \lambda\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = r + \lambda\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z = r + \lambda\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit der Kugel.

Aufgabe 4. System $\lambda = \mu = \nu = 60$, $\xi = \eta = \zeta = 0$, Schnittpunkt der Geraden, welche mit den Achsen gleiche Winkel bildet, mit der Kugel.

Aufgabe 5. Wann stellt eine quadratische Gleichung $f(xyz) = 0$ eine Kugel dar?

$f(xyz) = 0$ mufs mit $\varphi(x - \xi \ldots) - r^2 = 0$ { sein; also $a_{11} = a_{22} = a_{33} = c$; und da $c \neq 0$, so kann man $c = 1$ setzen, $a_{44}$ ist dann die Potenz des Nullpunktes

für die Kugel; $a_{12} = \cos \nu$, $a_{13} = \cos \mu$; $a_{23} = \cos \lambda$; $-a_{14} = \xi + \eta \cos \nu + \zeta \cos \mu$ etc. Für rechtwinkliges System müssen also $a_{12}, a_{13}, a_{23}$ Null sein und $a_{14} = -\xi$ etc.

Aufgabe 6. Ort der Punkte deren Abstände von zwei festen Punkten ein festes Verhältnis haben; rechtwinklige Achsen.

Sind A und B die festen Punkte, P der laufende Punkt, seien C und D die Punkte auf AB, welche AB innen und aufsen in dem festen Verhältnis $PA : PB = \lambda$ teilen, ist M die Mitte von CD so ist ... $M \left\{ \frac{x_a - \lambda^2 x_b}{1 - \lambda^2} \ldots \right\{ \xi \ldots$, die Strecke CM bezw. MD oder r ist $\frac{\lambda (x_a - x_b)}{1 - \lambda^2}$ und man findet bei rechtwinkligen Achsen ohne weiteres

$$(x - \xi)^2 + (\ldots) + \ldots - r^2 = 0,$$

der gesuchte Ort ist also die Kugel mit Centrum M und Radius r.

Aufgabe 7. Wie 6), beliebige Achsen.

Resultat: $\varphi (x - \xi) - r^2 = 0.$

Aufgabe 8. Ein Punkt bewegt sich so, dafs das Quadrat seines Abstands von einem festen Punkt zum Abstand von einer festen Ebene ein festes Verhältnis hat.

Aufgabe 9. Schnitt der Kugel durch eine Ebene.

$$M \{ 0, 0, 0; \quad K \{ \varphi (x\, y\, z) - r^2, \quad \text{Ebene } \varepsilon \{ x \alpha + y \beta + z \gamma - n = 0.$$

Sind a, b, c die Richtungskoordinaten der Normalen von M auf $\varepsilon$, so ist der Fufspunkt $F \{ n a, n b, n c$. Wir bilden $\varphi (x - n a; ..)$ für einen gemeinsamen Punkt, und erhalten nach

$$2a) \quad \varphi (x - n a) = \varphi (x) - 2 n (\alpha x + \beta y + \gamma z) + n^2 \varphi (a b c)$$

d. h.

$$5) \qquad \varphi (x - n a) = r^2 - n^2$$

Die Schnittkurve ist also ein Kreis mit dem Radius $\sqrt{r^2 - n^2}$.

Aufgabe 10. Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Ist $\varphi(x) = \varphi(x, y, z)$ und haben $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$ die alte Bedeutung (§ 9), so ist

$$f = \varphi(x - x_a) + \varphi(x - x_b) - c^2 = 0$$

und nach 2 bezw. 2a haben wir, wenn $x_m = \frac{1}{2}(x_a + x_b)$ etc.

$$f = \varphi(x - x_m) - r^2 = 0,$$

wo $$r^2 = \varphi(x_m) - \tfrac{1}{2}(\varphi(x_a) + \varphi(x_b) - c^2).$$

Aufgabe 11. Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von beliebig vielen festen Punkten, jedes multipliziert mit einer beliebigen Zahl konstant ist.

Seien die Punkte $x_1$ bis $x_n$, $m_1$ bis $m_n$ die Koeffizienten $x_m$ etc. die Koordinaten des Schwerpunkts der mit den Massen $m_1$ bis $m_n$ ausgestatteten Punkte, so ergiebt dieselbe Rechnung (wieder mit Benutzung des Faktums, daſs $\varphi'(x_a) + \varphi'(x_b) + \ldots = \varphi'(x_a + x_b + \ldots)$ als Ort die Kugel um den Schwerpunkt mit dem Radius r, wo

$$r^2 = \varphi(x_m) - \frac{1}{\Sigma m_i} \Sigma m_i \varphi(x_i) + \frac{c^2}{\Sigma m_i}.$$

Aufgabe 12. Durch die vier Punkte 111; 110; 101; 011; die Kugel zu legen; rechtwinklige Achsen.

Wir fassen die Aufgabe zunächst ganz allgemein; durch die vier Punkte $x_1$ bis $x_4$ die Kugel zu legen bei beliebigen Achsen.

Wir haben $\varphi(x_i - \xi) - r^2 = 0$ etc. das ist

$$\varphi(x_i) - 2\Sigma\xi\varphi'(x_i) + \varphi(\xi) - r^2 = 0.$$

Dies giebt zum Bestimmen von $\xi\,\eta\,\zeta$ das System:

$$\xi\varphi'(x_i - x_4) + \ldots = \frac{1}{2}(\varphi(x_i) - \varphi(x_4))$$

wo i jetzt nur die Werte 1 bis 3 durchläuft. Das System bestimmt $\xi\,\eta\,\zeta$ unzweideutig, auſser wenn die Determinante verschwindet, d. h:

$$\varphi'(x_1 - x_4)\,[\varphi'(y_2 - y_4)\,\varphi'(z_3 - z_4)] + \ldots = 0,$$

d. h. aber, daſs die vier Punkte in einer Ebene liegen. Also: Um jedes Tetraeder läſst sich eine und nur eine Kugel legen.

Hier erhalten wir:

$$\xi = \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2};\ \xi - \zeta = 0;\ \xi - \eta - 0,$$

$$\text{also } \xi = \eta = \zeta = \frac{1}{2},\ r^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{also } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 13. Durch die vier Punkte 123, 231, 312, 000; die Kugel zu legen.

Achsensystem $\lambda = \mu = \nu = 60^0$.

$$7\xi + 8\eta + 9\zeta = 25;\ 8\xi + 9\eta + 7\zeta = 25;$$
$$9\xi + 7\eta + 8\zeta = 25;\ 8\xi + 8\eta + 8\zeta = 25;$$
$$\xi = \eta = \zeta = 25:24;\ r^2 = \varphi(\xi\eta\zeta);\ r = \frac{25}{8\sqrt{3}}$$

## § 20. Die Tangentialebene. Die Polarebene.

Die Gleichung der Schnittgerade (3) zeigte, dafs die Kugel von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden kann. Liegt der Punkt $P \} x_0$ auf der Fläche, so ist $K(x_0) = 0$ und eine Wurzel von 3) ist $\lambda = 0$, wie an sich klar, da $PP = 0$ ist. Wenn aber auch noch der Koeffizient von $\lambda$ in 3) verschwindet, so sind beide Wurzeln 0, und die Gerade hat nur P mit der Kugel gemeinsam, auch der zweite Schnittpunkt fällt auf P, die Gerade ist eine Tangente der Kugel in P.

Da in der Gleichung $a\varphi'(x_0 - \xi) + \ldots = 0$ die Gröfsen a, b, c durch die ihnen proportionalen Linienkoordinaten $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ ersetzt werden können, wo x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so haben wir für die Tangenten

$$\alpha) \qquad (x - x_0)\cdot\varphi'(x_0 - \xi) + \ldots\ldots = 0.$$

Da $x - x_0 = x - \xi - (x_0 - \xi)$, so ist $\alpha) \}(x - \xi)\varphi'(x_0 - \xi) + . - (x_0 - \xi)\varphi'(x_0 - \xi)$. Der zweite Teil ist aber $\varphi(x_0 - \xi)$ und weil P auf der Kugel liegt, gleich $r^2$, also haben wir

$$6) \quad (x - \xi)\ \varphi'(x_0 - \xi) + (y - \eta)\ \varphi'(y_0 - \eta) + (z - \zeta)\ \varphi'(z_0 - \zeta) - r^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, der sämtliche Punkte jeder Tangente in P genügen, also hat die Kugel in jedem Punkt P eine Tangentialebene, deren Gleichung 6) ist.

Ist die Gleichung eines Punktes P auf der Kugel in Ebenenkoordinaten $p \{ u x_0 + v y_0 + w z_0 - 1 = 0$, so sind u, v, w die Koordinaten seiner Tangentialebene, wenn $u = \sigma \varphi' (x_0 - \xi)$; $v = \sigma \varphi' (y_0 - \eta)$; $w = \sigma \varphi' (z_0 - \zeta)$ wo $\sigma$ durch p bestimmt wird. Man hat sofort (vgl. S. 59) F, die zu $\varphi$ adjungierte Form,

$$F(u, v, w) = r^2 \sigma^2 \sin^2 \varkappa$$

und da $(x_0 - \xi) \varphi' (x_0 - \xi) + \ldots = r^2$; $(x_0 - \xi) u + \ldots = r^2 \sigma$ und da $x_0 u + \ldots = 1$, so ist $- r^2 \sigma = \xi u + \eta v + \zeta w - 1$ und somit:

$$7) \quad F(u, v, w) r^2 = (\xi u + \eta v + \zeta w - 1)^2 \sin^2 \varkappa.$$

Dies ist die uns schon bekannte (vgl. § 16 Aufgabe 5) Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten, welche ausdrückt, daſs der Abstand der Tangentialebene vom Centrum gleich dem Kugelradius.

Die Kugel ist eine Fläche zweiter Klasse.

Ist die Tangentialebene gegeben, so erhält man für den Berührungspunkt:

$$8) \quad x_0 - \xi = \frac{F^4(u)}{\sigma \sin^2 \varkappa} = \frac{- r^2 F'(u)}{(\xi u + \eta v + \zeta w - 1) \sin^2 \varkappa}.$$

Man sieht, daſs $\frac{x_0 - \xi}{r}$ etc. die Richtungskoordinaten der Normalen vom Nullpunkt auf die Tangentialebene, $\frac{u r}{(\xi u + \eta v + \zeta w - 1)}$ etc. die Richtungskosinus derselben sind.

Wenn das Achsensystem rechtwinklig, so sind $\varphi$ und F identisch und $\varphi'(x) = F'(x) = x$; $\sin^2 \varkappa = 1$; somit

$$6a) \quad (x - \xi)(x_0 - \xi) + \ldots - r^2 = 0.$$

$$7a) \quad (u^2 + v^2 + w^2) r^2 = (\xi u + \eta v + \zeta w - 1)^2.$$

$$8a) \quad x_0 - \xi = \frac{- u r^2}{(\xi u + \eta v + \zeta w - 1)}.$$

Es sei $P \{ u x_1 + v y_1 + w z_1 - 1 = 0$ ein beliebiger Punkt und u, v, w irgend eine ihn enthaltende Tangential-

ebene der Kugel, $x \ldots$ ihr Berührungspunkt. Da zwischen den Gröſsen u, v, w zwei Gleichungen bestehen, die des Punktes P und die der Kugel, so giebt es eine einfach-unendliche Schar von Tangentialebenen der Kugeln durch den Punkt P und somit eine einfach-unendliche Schar von Berührungspunkten. Für diese Berührungspunkte haben wir

$$\sigma (x_1 \varphi' (x - \xi) + \ldots) - 1 = 0$$
$$\sigma (x \varphi' (x - \xi) + \ldots) - 1 = 0$$
$$(x - x_1) \varphi' (x - \xi) + (y - y_1) \varphi' (y - \eta) + (z - z_1) \varphi' (z - \zeta) = 0$$
$$((x - \xi - (x_1 - \xi)) \varphi' (x - \xi) + \ldots . = 0.$$

Da $\quad (x - \xi) \varphi' (x - \xi) + \ldots = \varphi (x - \xi) = r^2$

und $(x_1 - \xi) \varphi' (x - \xi) + \ldots = (x - \xi) \varphi' (x_1 - \xi) + \ldots$

so erhalten wir

$$9) \quad (x - \xi) \varphi' (x_1 - \xi) + (y - \eta) \varphi' (y_1 - \eta) + (z - \zeta) \varphi' (z_1 - \zeta) - r^2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche genau der der Tangentialebene konform ist, nur daſs an Stelle des Berührungspunktes der Punkt $x_1 \ldots$ getreten ist. Also:

Alle Berührungspunkte liegen in einer Ebene; somit liegen sie auf einem Kreise.

Diese Ebene 9) heiſst die Chordale oder die (harmonische) Polare des Poles P.

Ihre Richtungskosinus sind proportional $\varphi' (x_1 - \xi)$, also ihre Richtungskoordinaten proportional $(x_1 - \xi)$, somit steht sie auf MP senkrecht (vgl. S. S. VIII Kreis).

Aufgabe 1. Die Polare des Centrums.

Die unendlich ferne Ebene $- r^2 = 0$.

Aufgabe 2. Zieht man durch den Pol eine Gerade, so werden ihre Kugelpunkte durch den Pol und die Polare harmonisch getrennt.

Wir haben nach 3) $K (x_1) + 2 \lambda (a \varphi' (x_1 - \xi) + \ldots) + \lambda^2 \varphi (a b c) = 0$ für die Schnittpunkte, und wenn $x_0$ der Punkt ist, in dem die Gerade die Polare schneidet, und der Abstand beider Punkte $\sigma$ ist, so ist $a = \sigma^{-1} (x_0 - x_1)$ und mittels 9) erhalten wir

$$K (x_1) - \frac{2 \lambda}{\sigma} K (x_1) + \lambda^2 = 0$$

also wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wurzeln sind $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\sigma = 2\,\lambda_1\,\lambda_2$ oder (vgl. S. S. VIII S. 20 Aufgabe 19)

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\sigma}.$$

Aufgabe 3. Wenn Pol und Polare ineinander liegen, gehören sie zur Fläche $F^2$ bezw. $\varphi^2$.

Aufgabe 4. Alle Berührungspunkte sind von P gleich weit entfernt und zwar um $\sqrt{K(x_1)}$.

Aufgabe 5. Den Abstand der Polaren vom Pol durch Rechnung zu bestimmen.

9) giebt $K(x_1) : \sqrt{(F(\varphi'(x - \xi)) : \sin^2 \varkappa} = K(x_1)$ $: \sqrt{\varphi(x_1 - \xi)} = \dfrac{MP^2 - r^2}{MP}$ oder $(d^2 - r^2) : d$.

Aufgabe 6. Durch Rechnung zu erweisen, dafs die Polaren aller von M um d entfernten Pole Tangentialebenen an der Kugel um M mit Radius $r^2 : d$ sind.

Aufgabe 7. Wenn der Pol einen Kreis um M mit Radius d beschreibt, welche Fläche umhüllen die Polaren?

Machen wir die Ebene des Kreises zur y-Ebene, M zum Nullpunkt, die Achsen rechtwinklig, so haben wir für die Polare und die ihr benachbarte

$$x x' + z z' - r^2 = 0;\; x'^2 + z'^2 = d^2;\; x \varepsilon + z \eta = 0$$

wenn $x'' = x' + \varepsilon$, $z'' = z' + \eta$ und $\varepsilon$ und $\eta$ so klein, dafs $x' \varepsilon + z' \eta = 0$, hieraus $x' = \lambda x$, $z' = \lambda z$ und daraus

$$x^2 + z^2 = r^4 : d^2.$$

Die Fläche ist also der Cylinder, dessen Leitkreis diese Gleichung darstellt und dessen Achse die y-Achse ist.

Die Polarebene (eines reellen Pols P) ist stets reell, gleichgültig ob die Tangentialebenen durch P reell sind oder nicht, d. h. ob die Gleichungen in Ebenenkoordinaten von P und der Kugel vereinbar sind oder nicht. Die Bedingung der Realität giebt Aufgabe 4 sofort, es mufs $K(x_1)$ positiv, d. h. $MP > r$, sein.

Aufgabe 8. Die Bedingung der Realität der Tangentialebene direkt abzuleiten. Wir schreiben 7) in der Form

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma - h = r$$

und dann giebt die Kombination mit der Gleichung von P:

$$(x_1 - \xi) \cos \alpha + (y_1 - \eta) \cos \beta + (z_1 - \zeta) \cos \gamma = r.$$

Dividiert man durch d, so sind $(x_1 - \xi) : d$ etc. die Richtungskoordinaten der Gerade MP, und somit $r : d$ der Kosinus des Winkels, welchen die auf MP senkrechte Ebene und die Ebene (uvw) miteinander einschliefsen, und also mufs $d > r$ sein.

Aufgabe 9. Die sämtlichen Tangentialebenen durch P schliefsen mit der Achse MP gleiche Winkel ein.

Aufgabe 10. Wenn die Polare gegeben ist (u, v, w) den Pol P zu bestimmen. Der Vergleich der Gleichung 9) mit $xu + yv + zw - 1 = 0$ giebt

$$10) \qquad (x_1 - \xi) = \frac{-F'(u)}{\sin^2 \varkappa} \cdot \frac{r^2}{(\xi u + \eta v + \zeta w - 1)}$$

also wie 8), nur dafs der Pol an Stelle der Berührungspunkte getreten ist.

Aufgabe 11. **Hauptsatz:** Bewegt sich ein Punkt auf einer Ebene, so dreht sich seine Polarebene um den Pol jener Ebene. Dreht sich eine Ebene um einen festen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polarebene jenes festen Punktes.

Die Gleichung 9) ändert sich nicht, wenn man x und $x_1$ vertauscht.

Aus Aufgabe 11 folgt sofort: liegen die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ etc. auf einer Geraden g, so schneiden sich ihre Polaren $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ etc. auf einer Geraden $\gamma$; denn, wenn man durch g irgend welche Ebenen legt, so müssen deren Pole auf allen Polaren von $P_1$ etc. liegen.

Aufgabe 12. Den Satz: Bilden die Pole eine Punktreihe, so bilden die zugehörigen Polaren ein Ebenenbüschel und v. v., durch Rechnung zu beweisen.

Sind $P_1$ und $P_2$ zwei Pole, $P_3$ ein dritter auf ihrer Verbindungsgeraden, so ist $P_3 \left\{ \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \right.$; und sind $\pi_1$ und $\pi_2$ die Polaren, so ist $\pi_1 \left\{ u_1 \left\{ \varphi_1 (x_1 - \xi) : N_1 \right. \right.$ wo $N_1 = \varphi' (x - \xi) + \ldots + r^2$; $N_1 = x_1 \varphi' \xi + \ldots - K (\xi \eta \zeta)$; $\pi_2 \left\{ u_2 \right.$; $\pi_3 \left\{ \left( \varphi_1 \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} - \xi \right) : N_3 \right.$.

Erweitert man mit $(1-\lambda)$, so ist:

$$\pi_3 \left\{ \frac{\varphi_1 [x_1 - \lambda x_2 - \xi (1-\lambda)]}{N_1 - \lambda N_2} \quad \left\{ \frac{\varphi_1 (x_1 - \xi) - \lambda \varphi_1 (x_2 - \xi)}{N_1 - \lambda N_2} \right. \right.$$

also

$$\pi_3 \left\{ \frac{u_1 - \mu u_2}{1 - \mu} \right.$$

wo $\mu = \lambda N_2 : N_1$. Entsprechend ist der Beweis für die Umkehrung.

Aufgabe 13. Das Doppelverhältnis von vier Punkten der Punktreihe und das der zugehörigen Ebenen des Büschels sind gleich, $\mu_1 : \mu_2 = \lambda_1 : \lambda_2$, insbesondere:

Vier harmonischen Ebenen des Büschels entsprechen vier harmonische Punkte der Reihe und umgekehrt.

Der Büschel und die Reihe sind projektiv bezogen. Die Geraden, welche die Träger des Büschels und der Reihe sind, heifsen konjugiert.

Aufgabe 14. Schneiden sich zwei konjugierte Geraden, so liegt ihr Schnittpunkt auf der Kugel.

[Liegen die Pole P auf g und schneiden sich ihre Polaren in $\gamma$, und sind Q Punkte auf g, so schneiden sich ihre Polarebenen in $\gamma$, somit geht die Polare von S durch g und $\gamma$, also durch S.]

Zwei sich schneidende konjugierte Geraden sind Tangenten an der Kugel im Schnittpunkt.

Aufgabe 15. Wenn die Gerade g durch zwei ihrer Punkte gegeben ist, die Gleichung ihrer konjugierten $\gamma$ in Punktkoordinaten aufzustellen.

Die Gleichungen § 12 Aufgabe 1 und 7 geben sofort

$$\frac{x}{[v_1\, w_2]} = \frac{y + \dfrac{w_1 - w_2}{[v_1\, w_2]}}{[w_1\, u_2]} = \frac{z + \dfrac{v_2 - v_1}{[v_1\, w_2]}}{[u_1\, v_2]}.$$

Aufgabe 16. Die Linienkoordinaten von $\gamma : a' \ldots A'$ durch die von $g : a \ldots A \ldots$ auszudrücken. Zur Vereinfachung wählen wir das Centrum der Kugel zum Ursprung.

Es ist $a' = [v_1\ w_2] = \frac{F_1(A\,B\,C)}{r^4}$;

$$A' = -(u_2 - u_1) = -\varphi_1 \frac{(a\,b\,c)}{r^2}.$$

Aufgabe 17. Die Bedingung, dafs g und $\gamma$ sich schneiden (Formel 5, § 12), giebt sofort:

$$10) \qquad F(A, B, C) = r^2 \varphi(a\,b\,c).$$

Aufgabe 18. Durch Rechnung zu beweisen, dafs, wenn $\gamma$ die konjugierte von g, g die konjugierte von $\gamma$ ist.

Aufgabe 19. Zu zeigen, dafs die Bedingung 10) mit der Bedingung, dafs die Gerade g ($\gamma$) Tangente an die Kugel ist, identisch ist.

Die Formel 3) giebt in bekannter Weise als Bedingung, dafs die beiden Werte des $\lambda$ gleich sind.

$$11) \quad K(x_0 \ldots) \cdot \varphi(a\,b\,c) = (a\,\varphi_1(x_0 \ldots) + \ldots)^2.$$

Als $x_0$ wählen wir Punkt A aus § 12 Aufgabe 1, also $A\{0; -\frac{C}{a}; \frac{B}{a}$ und erhalten

$$\varphi(0, -C, B)\,\varphi(a\,b\,c) - r^2 a^2 \varphi(a\,b\,c) = (a\,\varphi_1\,x_0 \ldots)^2$$

und hieraus mit leichter Mühe die Formel 10:

Die Gleichung der Kugel ist also auch in Linienkoordinaten vom zweiten Grade.

Aufgabe 20. Die Bedingung dafür, dafs zwei konjugierte Geraden aufeinander senkrecht stehen (§ 12 Aufgabe 8), giebt $a'\varphi'(a) + \ldots = 0$, oder abgesehen von dem konstanten Faktor $\sin^2 \varkappa$

$$A\,a + B\,b + C\,c = 0,$$

also:

**Je zwei für die Kugel konjugierte Geraden stehen aufeinander senkrecht.**

Aufgabe 21. Diesen Satz ohne Rechnung zu erweisen.

[Die Linie vom Centrum nach dem Pol steht auf den Polaren senkrecht.]

Aufgabe 22. Den Satz aus der Bedeutung von $\varphi_1'(a)$; $F_1'(A, B, C)$ abzuleiten.

Aufgabe 23. Wenn g durch das Centrum geht, wo liegt $\gamma$?

Für jede Gerade durch den Nullpunkt ist $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, also sind $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, d. h. die Gerade liegt im Unendlichen.

Aufgabe 24. Die Geraden des Komplexes der Tangenten einer Kugel, welche durch den festen Punkt $P \{ x_0$ gehen, bilden einen geraden Kreiskegel, der zu einer Doppelebene ausartet, wenn P auf der Kugel liegt.

Die Tangenten einer Kugel bilden ein einfaches Beispiel eines Linien- bezw. Strahlenkomplexes zweiten Grades.

---

## § 21. Der lineare Kugelkomplex.

Der Gleichung der Kugel läfst sich die Form geben (vgl. § 19).

$$1)\quad K = \varphi(x\,y\,z) - 2\,(x\,\varphi_1(\xi) + y\,\varphi_2(\eta) + z\,\varphi_3(\zeta)) + \varphi(\xi\,\eta\,\zeta) - r^2 = 0.$$

Das konstante Glied ist nichts anderes als die Potenz p der Kugel im Ursprung.

Wenn x, y, z über jedes Mafs grofs werden, reduziert sich die Form K auf

$$1\text{a})\qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Man kann dies noch deutlicher machen durch Einführung einer Hülfsvariabel $s_4$, indem man $x = s_1 : s_4$; $y = s_2 : s_4$; $z = s_3 : s_4$ setzt. Dann ist

$$K = 0 \{ \varphi(s_1\,s_2\,s_3) - 2\,s_4\,(s_1 \ldots) + s_4^2\,p = 0$$

und wenn $s_4 = 0$, so werden x, y, z unendlich und K reduziert sich auf $\varphi(s_1\,s_2\,s_3) = 0$, welche Gleichung zerfällt in $s_4 = 0$ und $\varphi(x, y, z) = 0$. In diesem Koordinatensystem ist $s_4 = 0$ die Gleichung aller unendlich fernen Punkte, d. i. der unendlich fernen Ebene.

Die Gleichung 1a) hat, wenn x, y, z als beliebig variabel betrachtet werden, nur eine reelle Lösung: $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$, und stellt daher als reelle Fläche eine Punktkugel um den Nullpunkt dar.

Läfst man aber auch imaginäre Lösungen zu, und ordnet diesen eine eigene Gattung uneigentlicher Raumpunkte, die imaginären, zu, so giebt diese Gleichung eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen bezw. imaginärer

Punkte. Ist $P\{x$ eine solche, so ist $\lambda x$ ebenfalls eine Lösung, d. h. die ganze Gerade liegt auf der Fläche, sie stellt daher einen imaginären Kegel — den Kugelkegel — dar, dessen reelle Spitze der Nullpunkt ist.

Aus der Form 1a) ist das Centrum der Kugel verschwunden, alle Kugeln verschmelzen im Unendlichen mit dem Kugelkegel und da wir alle unendlich fernen Punkte, reelle wie imaginäre, auf der unendlich fernen Ebene $c = 0$ bezw. $s_4 = 0$ annehmen, so können wir sagen:

Alle Kugeln gehen durch denselben imaginären Kreis im Unendlichen.

Aufgabe 1. Der imaginäre Kreis im Unendlichen ist eine unveränderliche Kurve.

Aus der Bedeutung der Funktion $\varphi$ folgt, dafs sie ihre Form bei Koordinatentransformation mit Beibehaltung des Nullpunktes nicht ändert, verlegt man den Ursprung nach $\xi$, so geht sie in $\varphi(x-\xi)$ über, welche Form im Unendlichen mit $\varphi(x)$ identisch ist; die Gleichung der unendlich fernen Ebene konstans $= 0$ bezw. $s_4 = 0$ wird von der Koordinatentransformation gar nicht berührt.

Dieser Kreis heifst daher: die absolute Kurve.

Aufgabe 2. Das Schnittgebilde zweier Kugeln $K_1$ und $K_2$ zu betrachten.

Das Schnittgebilde besteht a) aus dem Kreis $\varphi(x y z) = 0$, $s_4 = 0$, b) aus dem Schnittgebilde von $K_1$ bezw. $K_2$ und der Ebene $K_1 - K_2 = 0$, denn je zwei der Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_1 - K_2 = 0$ ziehen die dritte identisch nach sich; das letztere Gebilde ist aber (vgl. Aufgabe 3 § 14) ein Kreis; der Schnittkreis.

Aufgabe 3. Wann ist der Schnittkreis reell?

Formel 5) § 12 ergiebt als Bedingung

$$r_1 + r_2 \geqq M_1 M_2 \geqq |r_1 - r_2|.$$

Die Ebene $K_1 - K_2 = 0$ heifst die Radical- oder Potenz-Ebene der beiden Kugeln, weil sie nach Formel 4) der Ort der Punkte ist, welche für die beiden Kugeln gleiche Potenz haben.

Aufgabe 4. Ort der Punkte, deren Potenzen in Bezug auf die Kugeln $K_1$ und $K_2$ das konstante Verhältnis $\lambda$ haben.

$$K = K_1 - \lambda K_2 = \varphi(x y z) - 2(x \varphi_1 \xi + \ldots) + \frac{p_1 - \lambda p_2}{1 - \lambda} = 0,$$

also eine Kugel, deren Centrum auf der Verbindungslinie von $\xi_1$ und $\xi_2$ liegt und sie im Verhältnis $\lambda$ teilt, und deren Potenz im Nullpunkt $(p_1 - \lambda p_2):(1 - \lambda)$ ist; die Kugel K geht durch den Schnitt von $K_1$ und $K_2$; die Potenzebene von K, $K_1$ und $K_2$ ist die Ebene $K_1 - K_2 = 0$.

Aufgabe 5. Den Winkel zu bestimmen, unter dem sich zwei Kugeln schneiden.

Der Winkel zwischen den Tangentialebenen in einem gemeinsamen Punkte ist gleich dem der Radien nach dem Berührungspunkte; er sei $\varphi$, dann ist $2 r_1 r_2 \cos\varphi = r_1^2 + r_2^2 - \overline{M_1 M_2}^2$,

$$2 r_1 r_2 \cos\varphi = \varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1 - \xi_2) - (p_1 + p_2)$$

und nach Form 2 des vorigen Paragraphen:

$$2 r_1 r_2 \cos\varphi = 2(\xi_2 \varphi_1 \xi_1 + \eta_2 \varphi_2 \eta_1 + \zeta_2 \varphi_3 \zeta_1) - (p_1 + p_2).$$

[Zu bemerken, dafs $\varphi_1 \xi$ = dem Koeffizienten von $\xi$ in $\varphi(\xi \eta \zeta)$, $\varphi_2 \eta$ gleich dem von $\eta$ etc. ist.]

Aufgabe 6. Eine Kugel zu bestimmen, welche vier gegebene Kugeln unter dem Winkel von 60° schneidet.

Man erhält, vorausgesetzt, dafs nicht alle vier Mittelpunkte in einer Ebene liegen, für r eine Gleichung vierten Grades.

Aufgabe 7. Die Bedingung, dafs die Kugeln sich rechtwinklig schneiden, aufzustellen.

$$2)\quad \xi_2 \varphi_1 \xi_1 + \ldots - \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = 0 = \xi_1 \varphi_1 \xi_2 + \ldots$$

Die Gröfsen $\xi, \eta, \zeta, r$ bezw. $\xi, \eta, \zeta, p$ bestimmen die Kugel vollständig, sie sind daher die Koordinaten der Kugel. Denken wir uns in 2) $\xi_1 \ldots p_1$ fest, $\xi_2 \ldots p_2$ variabel, so stellt 2) alle $\infty^3$ Kugeln dar, welche die gegebene erste Kugel normal oder orthogonal durchschneiden, sie bilden, da 2) in den Variabeln Koordinaten $\xi \ldots p$ linear ist, einen linearen Kugelkomplex.

Es sei

$$3)\qquad \xi d_1 + \eta d_2 + \zeta d_3 + p d_4 + d_5 = 0$$

irgend eine lineare Gleichung zwischen den variabeln Koordinaten einer Kugel, dann bildet die Gesamtheit aller

Kugeln, welche der Gleichung 3) genügen, den linearen Kugelkomplex $\Omega$.

Setzt man

$$\varphi_1 \xi_1 = -\frac{d_1}{2 d_4}; \quad \varphi_2 \eta_1 = -\frac{d_2}{2 d_4}; \quad \varphi_3 \zeta_1 = -\frac{d_3}{2 d_4};$$

$$p_1 = +\frac{d_5}{2 d_4},$$

so geht 3) in die Form 2) über, d. h.:

Der lineare Kugelkomplex $\Omega$ besitzt stets Eine Kugel, welche alle Kugeln von $\Omega$ normal schneidet.

Diese Kugel heifst die Hauptkugel (auch Normal-, Orthogonal-Kugel) von $\Omega$.

Ist $d_4 = 0$, so geht die Hauptkugel in eine Ebene **(Plankugel)** über.

Die Gleichung 3), welche den allgemeinen linearen Kugelkomplex definiert, ist } 2) und diese geht, wenn man den Nullpunkt in das Centrum der Hauptkugel legt, über in:

$$4) \qquad p = -p_1 = c^2,$$

oder:

Der lineare Kugelkomplex ist die Gesamtheit aller Kugeln, welche in Einem Punkt dieselbe Potenz haben.

Diese konstante Potenz $c^2$ ist gleich dem Quadrat des Radius $\varrho$ der Hauptkugel, in ihrem Centrum O hat sie die Potenz $-\varrho^2$, sie gehört also im allgemeinen nicht zum Komplex. Ihr Centrum O heifst der Kern des Komplexes.

Aufgabe 8. Wie ist $\Omega$ beschaffen, wenn die Hauptkugel zu $\Omega$ gehört?

[$\Omega$ besteht dann aus den $\infty^3$ Kugeln, welche durch O gehen.]

Aufgabe 9. Wie viel Kugeln von $\Omega$ haben in einem gegebenen Punkt des Raumes ihr Centrum?

Eine, deren Radius gleich $|\sqrt{\varphi(\xi\eta\zeta) - c^2}|$.

Ist $c^2$ negativ, so wird die Hauptkugel imaginär, der Kern liegt dann innerhalb jeder Kugel, im entgegengesetzten Fall liegt der Kern aufserhalb jeder Kugel.

Aufgabe 10. Die Punktkugeln des Komplexes zu bestimmen.

Die Punktkugeln haben den Radius 0, ihre Centren genügen also der Gleichung

$$\varphi(\xi\eta\zeta) - 0 = c^2;\ \varphi(\xi\eta\zeta) - \varrho^2 = 0$$

oder:

Die Punktkugeln des Komplexes bestehen aus den Punkten der Hauptkugel.

Aufgabe 11. Die Plankugeln von $\Omega$ zu bestimmen.

Die Plankugeln sind die Kugeln, deren Radius $\infty$; wir erhalten sie, wenn wir den Koordinaten der Kugel die Form geben:

$$\frac{\xi'}{d};\ \frac{\eta'}{d};\ \frac{\zeta'}{d};\ \frac{p'}{d}$$

und nach Multiplikation der Gleichung der Kugel in Form 1 mit d diese Zahl gleich 0 setzen, dann rückt das Centrum ins Unendliche und der Radius wird ebenfalls unendlich; wir erhalten dann für diese Plankugeln die Gleichungen der Ebenen

$$-2(x\varphi_1(\xi') + ..) + p' = 0.$$

Da $p' = dc^2$ sein soll, so ist $p' = 0$ und wir haben

$$4)\qquad x\varphi_1\xi' + y\varphi_2\eta' + z\varphi_3\zeta' = 0$$

als Gleichung der Plankugeln von $\Omega$, also eine $\infty^2$fache Menge. Da $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, d. h. also 0 jede Gleichung 4) erfüllt, so gilt der Satz:

Alle Plankugeln des Komplexes schneiden sich im Kern.

Seien $K_1 \{ \xi_1 \ldots p_1$ und $K_2 \{ \xi_2 \ldots p_2$ zwei Kugeln von $\Omega$, so hat die Ebene ihres Schnittkreises die Gleichung

$$K_1 - K_2 = 2x\varphi_1(\xi_2 - \xi_1) + .. = 0$$

geht also durch den Kern, was a priori aus der Bedeutung der Schnittebene klar, da $K_1 - K_2 = 0$ eben nur aussagt, dafs $K_1 = K_2$, d. h. dafs der betreffende Punkt für beide Kugeln gleiche Potenz hat.

Die Ebene $K_1 - K_2 = 0 \{ x\varphi_1(\xi_2 - \xi_1) + \ldots = 0$, auf welcher der Schnittkreis der beiden Kugeln $K_1$ und $K_2$ liegt, ist stets reell und existiert als Potenzebene, gleichgiltig ob der Schnittkreis reell, auf einen Punkt zusammenschrumpft, oder imaginär ist, d. h. ob es unendlich

viele, einen und keinen Punkt giebt, in dem beide Kugeln die Potenz 0 haben.

Sind $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ zwei ganz beliebige Kugeln, so kann jeder Punkt der Potenzebene $K_1 - K_2 = 0$ zum Kern eines Komplexes gemacht werden, dem beide Kugeln angehören.

Ist $K_1 - K_2 = c$, so ist das die Gleichung einer Ebene, welche der Potenzebene parallel ist, also:

Verschiebt man die Potenzebene parallel, so erleidet die Differenz der Potenzen für alle Punkte die gleiche Änderung.

Die Potenzebene (vgl. S. S. VIII S. 100) steht auf der Centrale (oder Achse) der Kugeln senkrecht und teilt sie so, dafs die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich der Differenz der Quadrate der Radien ist. $\varphi_1 (\xi_2 - \xi_1)$ etc. sind den Richtungskosinus von $M_1 M_2$ proportional.

Aufgabe 12. Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich im allgemeinen in Einer Geraden, der Potenzachse oder Radikalachse

$(K_1 - K_2) + (K_2 - K_3) + (K_3 - K_1)$ verschwindet identisch.

Aufgabe 13. Die vier Potenzachsen von vier Kugeln schneiden sich generaliter in Einem Punkt, dem Potenzpunkt.

Aufgabe 14. Wann erleidet der Satz sub Aufgabe 12 eine Ausnahme?

Aufgabe 15. Wenn zwei der drei Potenzebenen dreier Kugeln zusammenfallen, fallen alle drei zusammen, und die Kugeln schneiden sich im selben Kreis, gehören zu einer Schar und umgekehrt.

$$K_3 - K_1 \{ K_2 - K_3 ;\ K_3 - K_1 = \lambda (K_2 - K_3);$$
$$K_3 \{ K_1 + K_2 \lambda,$$

d. h. also $K_3 = 0$ sobald $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$.

Ist umgekehrt

$$K_3 \{ K_1 - \mu K_2, \text{ so ist } K_3 = \frac{K_1 - \mu K_2}{1 - \mu}; K_3 - K_1 = \mu (K_1 - K_2).$$

Die Zahl $\lambda$ heifst der Parameter der Schar. Die Centren aller Kugeln der Schar liegen auf Einer

Geraden $\left(\xi_3 = \frac{\xi_1 - \mu \xi_2}{1 - \mu}\right)$; das anharmonische Verhältnis der Centren gilt als das der Kugeln, ist für zwei Kugeln $K_3$ und $K_4$ die Zahl $\lambda + \lambda' = 0$, so bilden die vier Kugeln $K_1\, K_2\, K_3\, K_4$ ein harmonisches Kugelbüschel.

Aufgabe 15a. Die Potenzebene zweier konzentrischer Kugeln? Die unendlich ferne Ebene; konzentrische Kugeln haben nur die absolute Kurve gemein, und es kann angenommen werden, dafs sie sich in dieser berühren; es bilden also alle einer Kugel K konzentrischen Kugeln eine Schar.

Es seien $M_1$ und $M_2$ die Centren zweier Kugeln $K_1$ und $K_2$ von $\Omega$, $K_3$ und $K_4$ seien zwei andere Kugeln von $\Omega$, deren Centren $M_3$ und $M_4$ auf $M_1 M_2$ liegen, so ist:

$$\xi_3 = \frac{\xi_1 - \xi_2 \lambda}{1 - \lambda}; \ldots K_3 \{ K_1 - \lambda K_2,\ K_3 - K_4 \} K_1 - K_2 \text{ also:}$$

Alle Kugeln des Komplexes, deren Centren auf einer Geraden liegen, schneiden sich im selben Kreis, bilden eine Schar.

Aufgabe 16. Jede Plankugel des Komplexes ist die Potenzebene je zweier seiner Kugeln, deren Centrale auf ihr senkrecht steht.

$$K_1 - K_2 = x \varphi_1 (\xi_2 - \xi_1) + = 0 \} x \varphi_1 \xi' + \ldots = 0$$

sobald $\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi'} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta'} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta'}$ gesetzt wird.

Es schneiden sich also die $\infty^3$ vielfachen Kugeln des Komplexes in der $\infty^2$fachen Menge seiner Plankugeln.

Aufgabe 17. Alle Potenzachsen, welche zu Kugeln von $\Omega$ gehören, gehen durch den Kern.

[Jede Potenzebene ist nach Aufgabe 16 Plankugel.]

Sind $K_1, K_2, K_3$ drei Kugeln, welche nicht zu einer Schar gehören, dann ist das System

$$K_1 = 0;\ K_2 = 0;\ K_3 = 0$$

äquivalent dem System:

$$K_1 = 0;\ K_2 - K_3 = 0;\ K_3 - K_1 = 0,$$

d. h.

Drei Kugeln, welche nicht zu Einer Schar gehören, schneiden sich in zwei Punkten.

Diese Schnittpunkte können zusammenfallen, sie können imaginär werden.

Drei Kugeln des Komplexes, welche nicht zur selben Schar gehören, schneiden sich in einem Punktepaar, das mit dem Kern in Einer Geraden liegt.

Aufgabe 18. Ein Punktepaar, in dem sich drei Komplexkugeln schneiden, wird durch die Hauptkugel harmonisch getrennt.

Seien A und B die Schnittpunkte, so ist nach Aufgabe 17: $OA \,.\, OB = c^2 = \varrho^2$. Schneidet die Hauptkugel OAB in $H_1$ und $H_2$, so werden (S. S. VIII § 23) A und B durch $H_1$ und $H_2$ harmonisch getrennt.

Die Punkte A und B kann man einander zuordnen, auf jedem Strahl der von O ausgeht, jedem Kernstrahl, giebt es zu jedem Punkt A einen entsprechenden B, und A ist wieder der entsprechende von B.

Aufgabe 19. Wenn A gegeben ist, die Koordinaten von B zu bestimmen.

Ist $A\{x\,..$ und $B\{x_1\,..$ so ist

$$\frac{x}{x_1} = \frac{OA}{OB};\; x_1 = \frac{OB\,.\,OA\,.\,x}{OA^2} = \frac{x\,c^2}{OA^2}$$

und ebenso umgekehrt $x = \frac{x_1\,c^2}{OB^2}$.

Aufgabe 20. Jede Kugel des Komplexes, welche durch A geht, geht durch B und v. v.,

1) folgt der Satz unmittelbar aus dem Potenzsatz,

2) durch Rechnung: Es ist nach Voraussetzung $\varphi(x) - 2(x\varphi_1\xi + \ldots) + c = 0$ also wenn OB mit $r_1$ bezeichnet wird:

$$\frac{p^2}{r_1^4}\,\varphi(x_1) - 2\left(x_1\frac{p}{r_1^2}\,\varphi_1\,\xi + \right) + p = 0,$$

nun ist $r_1^2 = \varphi(x_1)$, und wenn man mit p dividiert und mit $r_1^2$ multipliziert und die Reihenfolge umkehrt, wird

$$\varphi(x_1) - 2(x_1\varphi_1\,\xi + \,..) + p = 0.$$

Aufgabe 21. Der Kern hat für je zwei Kugeln von $\Omega_7$ deren Centren $M_1$ und $M_2$ auf einem

Kernstrahl liegen, die kleinste gemeinsame Potenz.

[Hypotenuse ist gröſser als die Kathete.]

Aufgabe 22. Ist die Hauptkugel reell, so schneiden sich zwei Komplexkugeln, deren Centren auf einem Kernstrahl liegen, nicht.

$$(\varrho^2 > 0).$$

Aufgabe 23. Ist die Hauptkugel reell, so liegt in ihrem Inneren kein Centrum einer Komplexkugel.

[$d^2$, welches kleines $\varrho$ ist, müſste $\varrho^2 + r^2$ sein].

Die Kugel durch jeden Punkt P im Äuſsern erhält man, indem man von P an die Hauptkugel die Tangenten zieht.

Aufgabe 24. Durch den imaginären Schnittkreis zweier sich nicht schneidenden Kugeln eine dritte Kugel zu legen.

Lösung wie in S. S. VIII S. 103 für Kreise.

Aufgabe 25. Ist die Hauptkugel imaginär, so schneiden sich zwei Komplexkugeln, deren Centren auf einem Kernstrahl liegen, stets in einem reellen Kreise.

In diesem Falle giebt es durch jeden Punkt eine Kugel des $\Omega$, die Komplexkugel, deren Centrum O ist, hat den Radius $\varrho$, denn sie hat in O die Potenz $-\varrho^2$, diese Kugel tritt an Stelle der Hauptkugel, man kann sie Vizekugel nennen.

Aufgabe 26. Die Vizekugel wird von jeder Komplexkugel in einem gröſsten Kreise (der Vizekugel) geschnitten; sie hat von allen Komplexkugeln den kleinsten Radius.

Aufgabe 27. Wenn $p = -\varrho^2$, durch einen beliebigen Punkt P die Komplexkugel zu konstruieren.

[Man ziehe PO, in O den auf OP senkrechten Radius der Vizekugel OQ, so ist PQ der Radius].

Aufgabe 28. Zu zwei sich nicht schneidenden Kugeln die Potenzebene zu konstruieren.

[Vgl. S. S. VIII § 23, man konstruiere eine Hilfskugel, welche beide schneidet, die Potenzebenen schneiden sich in einer Geraden der gesuchten Ebene, welche auf der Centrale senkrecht steht. Beweis durch Rechnung?]

Aufgabe 29. Gegeben sind vier sich nicht schneidende Kugeln, deren Centren ein Tetraeder begrenzen, eine Kugel zu konstruieren, welche sie alle normal schneidet.

Man mache den Schnittpunkt der Potenzachsen zum Kern des Komplexes, dem alle vier Kugeln angehören, die Hauptkugel ist die gesuchte.

Aufgabe 30. Wenn $p = -\varrho^2$, müssen sich je zwei Komplexkugeln schneiden.

[Auf der Kugel giebt es keinen Parallelismus.]

Aufgabe 31. Gegeben sind vier sich zu je zweien schneidende Kugeln, eine Kugel zu konstruieren, welche von allen in einem gröfsten Kreis geschnitten wird.

Aufgabe 32. Die Potenzebene einer Punktkugel P und einer gewöhnlichen Kugel K zu bestimmen.

Aufgabe 33. Die Potenzebene der Punktkugel P in Bezug auf K ist der Polarebene von P bez. K parallel und hat von P den halben Abstand wie die Polarebene.

Beweis entweder ohne Rechnung oder mit Rechnung: $\varphi_1(u) - \varphi_1(v) = \varphi_1(u - v)$, die schon oft angewandte Gleichung; die Abstände findet man durch Einsetzung der Koordinaten von $P : \xi_p \dots$ in die Gleichungen der Ebene.

Aufgabe 34. Wie gestaltet sich der Komplex $\Omega$, wenn der Kern in einer bestimmten Richtung ins Unendliche rückt?

In der $\Omega$ konstituierenden Gleichung 3) ist dann $d_4 = 0$, während die $d_1, d_2, d_3, d_5$ endlich und bestimmt bleiben, die Hauptkugel wird dann zur Ebene (bezw. zur Ebene und der unendlich fernen Ebene)

$$\xi d_1 + \eta d_2 + \zeta d_3 + d_5 = 0$$

d. h. also, die sämtlichen Centren liegen auf dieser Ebene; da jedes Punktpaar von der Hauptkugel harmonisch geteilt wird und der eine Schnittpunkt im Unendlichen liegt, so wird jedes Punktpaar AB (das von Reye als zu $\Omega$ gehörig bezeichnet wird) von der Hauptkugel in der Mitte geschnitten, und ebenso steht, weil die Potenzebene durch den Kern geht, jeder Kreis, in dem sich zwei Komplexkugeln schneiden, auf der Hauptkugel (Ebene) senkrecht, und wird von ihr halbiert. Reye bezeichnet daher den Komplex, dessen Hauptkugel eine Plankugel ist, als symmetrisch.

Aufgabe 35. Potenzebene einer Kugel K und einer Plankugel.

Da die Plankugel aufgefafst werden mufs als eine Kugel, deren eine Hälfte ganz im Unendlichen liegt, so ist die Potenz in jedem nicht auf der Ebene liegenden Punkte als unendlich anzusehen (negativ), was aus der Form $d^2 - r^2 = p$ nicht ohne weiteres folgt, da die Differenz zweier unendlich grofser Strecken bezw. Flächen auch endlich sein könnte; für jeden auf der Ebene liegenden Punkt ist die Potenz, weil $0 . \infty$, unbestimmt; also ist die Ebene der Plankugel selbst die Potenzebene.

Die Rechnung führt zum selben Resultat; sobald man in der Gleichung der Plankugel

$$P = d\,\varphi(x) - 2(x\,\varphi_1\,\xi' + ..) + p' = 0$$

das d nicht direkt gleich 0 setzt, sondern zu Null werden läfst.

Es ist $K\{d\,\varphi(x) - 2\,d\,(x\,\varphi_1\,\xi_k) + p_k\,d = 0$ und $K = 0$ geht, wenn d zu Null wird, über in

$$x\,\varphi_1\,\xi + \ldots - p' = 0$$

das ist die Ebene, welche den unendlichen Teil der Plankugel bildet.

Aufgabe 36. Die Potenzebenen der Kugeln von $\Omega$, deren Centren auf einer Ebene liegen.

Die Ebene sei $\{ax + by + cz + d = 0 = \varepsilon.$

Eine Potenzebene sei z. B. $x\,\varphi_1\,(\xi_2 - \xi_1) + \ldots = 0 = (\xi_2 - \xi_1)\,\varphi_1\,x + \ldots$, dann ist $(\xi_2 - \xi_1)\,a + (\eta_2 - \eta_1)\,b + (\zeta_2 - \zeta_1)\,c = 0$, und der Punkt S, bestimmt durch:

$$\varphi_1(x) = a; \quad \varphi_2(y) = b; \quad \varphi_3(z) = c,$$

ist allen Potenzebenen gemeinsam. Also:

Die Potenzebenen der betrachteten Art schneiden sich in Einem Kernstrahl.

Aufgabe 37. Den Satz in Aufgabe 36 umzukehren.

Die Kugeln der Ebene $\varepsilon$ bilden innerhalb der $\infty^3$fachen Menge der Kugeln von $\Omega$ eine $\infty^2$fache Mannigfaltigkeit (Kongruenz nach Reye); alle diese Kugeln haben in einem Punkt O′ des Kernstrahls die gleiche Potenz q, sie gehören also zum Komplex $\Omega'$, der in O′, die Potenz q hat.

Aufgabe 38. Die Kugeln zu bestimmen, welche zwei Komplexen $\Omega$ und $\Omega'$, gemeinsam sind.

Der Kern von $\Omega$ sei A $\{ a_1, a_2, a_3$; die Potenz der Hauptkugel im Ursprung $p_0$, der Kern von $\Omega'$ sei B $\{ b_1, b_2, b_3$, die Potenz $q_0$. Wir haben dann nach 2)

$$2 [\xi \varphi_1 (a_1) + \ldots] - (p + p_0) = 0;$$
$$2 [\xi \varphi_1 (b_1) + \ldots] - (p + q_0) = 0$$

und durch Subtraktion

$$\xi \varphi_1 (a_1 - b_1) + \ldots - \frac{1}{2} (p_0 - q_0) = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene. Man überzeugt sich leicht, dafs die Potenzebenen jeden Paares von drei Kugeln dieser ebenen Kongruenz durch 0 und 0′ gehen. Also:

Zwei lineare Kugelkomplexe haben eine ebene Kongruenz gemein, deren Achse die Verbindungslinie der beiden Kerne ist, während die Ebene auf dieser Achse senkrecht steht.

Aufgabe 39. Die Potenzebene einer beliebigen Kugel Q und einer Kugel K einer ebenen Kongruenz dreht sich um einen festen Punkt, wenn K die Kongruenz durchläuft. [Ohne Rechnung und mit Rechnung.]

Für die Anwendung der Lehre von der Potenz auf das Apollonische Problem im engeren und weiteren Sinne vgl. man die betreffenden Abschnitte aus der Lehre vom Kreis in S. S. VIII S. 110 bezw. das Werk von Reye: Synthetische Geometrie der Kugeln (Leipz. 1879); es ist wie kaum ein zweites geeignet für die in Baumeister's Handbuch der Erziehung und Unterrichtslehre vorgeschlagene Behandlung in den obersten Klassen der Mittelschulen, besonders der Oberrealschulen.

---

## § 22. Die Inversion.

Der Kugelkomplex $\Omega$ bestimmt auf jedem Kernstrahl vermöge der Relation $OA \cdot OA' = p = \pm \varrho^2$ eine Involution (S. S. VIII S. 104). Ist die Hauptkugel reell, so ist die Involution hyperbolisch, ist die Hauptkugel imaginär, so ist die Involution elliptisch, und parabolisch, wenn $p = 0$ ist. Ist die Hauptkugel eine Plankugel, so liegt der eine Hauptpunkt im Unendlichen, der andere in der Mitte jedes Punktpaars.

Wir haben also im **Raum** dieselbe gegenseitig eindeutige Zuordnung von Punkten, die wir in der **Ebene** (S. S. VIII S. 104) als **Inversion** bezeichneten. Ist die Hauptkugel reell, die gemeinsame Potenz im Kern O, **dem Centrum der Inversion**, positiv oder äufsere Potenz, so heifst die Inversion **äufsere**. Die Hauptkugel, die jetzt **Inversator** heifst, entspricht sich selbst Punkt für Punkt, d. h. jeder Punkt fällt mit seinem entsprechenden zusammen. Ist p negativ, die gemeinsame Potenz eine innere, so ist die Inversion eine innere, dann wird die Vicekugel zum **Inversator**, auch sie entspricht sich selbst, aber so, dafs jeder Punkt seinem **inversen** diametral gegenüber liegt. Jede Kugel von $\Omega$ entspricht sich selbst, wie auch jeder Kreis, in dem sich zwei Kugeln von $\Omega$ schneiden, jeder Kreis des Komplexes, sich selbst entspricht. Jeder Fläche entspricht eine Fläche, jeder Linie wieder eine Linie.

**Aufgabe 1.** Die inverse Fläche einer Ebene $\varepsilon$.

Die Ebene sei $ax + by + cz + d = 0$; $d \neq 0$.

Da $x' = \dfrac{xp}{\varphi(x)}$ und $x = \dfrac{x'p}{\varphi(x')}$ (§ 21 Aufgabe 19), so ist die inverse Fläche die Kugel:

$$\varphi(x') + \frac{x'pa}{d} + \ldots = 0$$

d. h. aber:

**Die inverse Fläche einer Ebene ist eine Kugel durch den Kern.**

Die Koordinaten des Centrums sind $\varphi_1(\xi) = \dfrac{-pa}{2d}$ etc. bezw. $\varphi_1(\xi) = a$ etc., $\dfrac{-p}{2} = d$.

**Aufgabe 2.** Die inverse Fläche einer Ebene durch den Kern?

Wenn $d = 0$, so ergiebt sich nach Multiplikation mit $\varphi(x')(d:p)$ $ax' + by' + cz' = 0$ für die inverse Fläche oder:

**Eine Ebene durch den Kern entspricht sich selbst.**

Dies Resultat ergiebt sich a priori daraus, dafs jede Ebene durch den Kern eine (Plan-) Kugel der Komplexes ist.

**Aufgabe 3.** Die Tangentialebene an die der Ebene $\varepsilon$ inverse Kugel im Kern?

§ 6 giebt hier, da $-\xi\varphi_1(-\xi)$ etc. $=\varphi(\xi\eta\zeta)=r^2$ ist, nach Division mit $p\,|\,d$

$$xa+yb+zc=0.$$

Die Tangentialebene an die der Ebene $\varepsilon$ inverse Kugel im Kern ist der Ebene $\varepsilon$ parallel.

Aufgabe 4. Die inverse Fläche einer Kugel.

Sei die Kugel $K\,\}\,\xi\,..\,\pi$, so ist die entsprechende Fläche

$$K'\left\{\frac{p^2}{\varphi^2(x')}\,\varphi(x')-\frac{2p}{\varphi(x')}\,(x'\varphi_1\xi+..)+\pi=0\right.$$

$$K\left\{\varphi(x')-2\left(x'\varphi_1\left(\frac{p\xi}{\pi}\right)+..\right)+\frac{p^2}{\pi}.\right.$$

Die inverse Fläche der Kugel K ist wieder eine Kugel K′. Die Koordinaten von K′ sind $\frac{\xi p}{\pi}\,...\,\frac{p^2}{\pi}$; man erhält sie, indem man die Koordinaten von M mit dem konstanten Faktor $p\,|\,\pi$ multipliziert, und die Potenz mit $p^2:\pi^2$.

Die Centren eines Paars inverser Kugeln liegen mit dem Kern auf Einer Geraden.

Aufgabe 5. Der Kern O teilt die Centrale MM′ eines Paares inverser Kugeln im Verhältnis der Radien, er ist einer der Ähnlichkeitspunkte der beiden Kugeln (vgl. S. S. VIII S. 96).

$$\left[\frac{OM'}{OM}=\frac{\xi'}{\xi}=\frac{\eta'}{\eta}=\frac{\zeta'}{\zeta}=\frac{p}{\pi};\right.$$

$$\frac{\overline{OM'}^2}{\overline{OM}^2}=\frac{\varphi(\xi'\eta'\zeta')}{\varphi(\xi\eta\zeta)}=\frac{p^2}{\pi^2}=\frac{\pi'}{\pi}=\frac{r'^2}{r^2}$$

also

$$\left.\left|\frac{OM'}{OM}\right|=\frac{r'}{r}\right].$$

O ist äufserer Ähnlichkeitspunkt, wenn p und $\pi$ gleiches Zeichen haben, innerer, wenn ungleiches.

Aufgabe 6. Was wird aus K′, wenn K durch den Kern (Centrum) der Inversion geht?

Dann wird $p:\pi=\infty$, das Centrum von K und der Radius wird unendlich, K′ wird zur Plankugel.

$$x' \varphi_1 \xi + y' \varphi_1 \eta + z' \varphi_1 \zeta - \tfrac{1}{2} p = 0$$

wie aus Aufgabe 1 hervorgeht, da die Inversion eine wirkliche Verwandtschaft ist, d. h. eine solche, die auf Gegenseitigkeit beruht, d. h. wenn A′ invers zu A, so ist A invers zu A′.

Aufgabe 7. Der Fufspunkt des vom Kern auf eine Ebene (Plankugel) gefällten Lotes ist invers zum Schnittpunkt dieses Lotes mit der inversen Kugel.

[Es ist die Gleichung des Lotes $x = \lambda \xi$ etc., und aus der Gleichung der Aufgabe 6 ergiebt sich $\lambda$ als $\frac{p}{2\varphi(\xi)}$ für den Fufspunkt F′ auf der Ebene; also, da $F \{ 2\xi$ und $F' \left\{ \frac{2\xi p}{\varphi(2\xi)} \right.$, so ist der Satz bewiesen.]

Aufgabe 8. Der einem linearen Kugelkomplex W entsprechende Kukelkomplex W′.

Die den Komplex W konstituierende Gleichung sei

$$\alpha) \qquad \xi \xi_0 + \ldots - \frac{1}{2}(\pi + p_0) = 0.$$

Die Koordinaten der $K \{ \xi \ldots \pi$ inversen Kugel K′ erhält man durch Multiplikation mit $\frac{p}{\pi}$ bezw. $\frac{p^2}{\pi^2}$, also geht $\alpha$) über in

$$\beta) \qquad \xi' \xi_0' + \ldots - \frac{1}{2}(\pi' + p_0')$$

wo $\xi_0' = \xi_0 \frac{p}{p_0}$ etc., $p_0' = p_0 \frac{p^2}{p_0^2}$, also:

Einem linearen Kugelkomplex entspricht invers wieder ein linearer Kugelkomplex. Die Hauptkugeln sind invers und die Potenz der Inversion ist mittlere Proportionale zwischen den Potenzen der Komplexe.

Aufgabe 8a. Einem Kugelkomplex n. Grades entspricht invers wiederum ein Kugelkomplex n. Grades.

(Während generaliter einer Fläche n. Grades eine Fläche 2n. Grades entspricht.)

Wie man in der Ebene durch zwei Paare inverser Punkte, welche nicht in Einer Geraden liegen, einen Kreis legen konnte, der im Kern die Potenz der Inversion hat, so kann man im Raum durch drei Paar inverser Punkte, welche nicht in Einer Ebene liegen, eine Kugel legen, welche im Kern O die Potenz der Inversion hat.

Aufgabe 9. Durch zwei inverse Kreise die Kugel zu legen.

[Wann wird dieselbe zur Plankugel?]

Aufgabe 10. Ein Kreiskegel, welcher eine Kugel in Einem Kreise schneidet, schneidet sie auch in einem zweiten Kreise.

Die in S. S. VIII S. 105 etc. gegebenen Sätze bleiben bestehen und lassen sich erweitern. Wir sagen, dafs zwei Flächen $\varphi$ und F sich im Punkt P berühren, wenn sie in P eine gemeinsame Tangentialebene haben. Dieser Ebene $\varepsilon$ entspricht dann invers eine Kernkugel $\varkappa$, welche die inversen Flächen $\varphi'$ und F' von $\varphi$ und F in P', dem inversen von P, berührt, wie aus der Eindeutigkeit und Gegenseitigkeit der inversen Beziehung und aus dem analytischen Ausdruck in Aufgabe 1 sofort erhellt, denn verschwindenden Änderungen von x entsprechen verschwindende Änderungen von x' und umgekehrt. Die Tangentialebene von $\varkappa$ in P' ist also die gemeinsame Tangentialebene von $\varphi'$ und F' in P'. Haben zwei Flächen $\varphi$ und F in P einen gemeinsamen Punkt, und sind $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ die Tangentialebenen von $\varphi$ und F in P, so entsprechen diesen zwei Kernkugeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ durch P', deren Tangentialebenen $\eta_1$ und $\eta_2$ in O den Ebenen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ nach Aufgabe 3 parallel sind. Die Tangentialebenen an die Kugeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in P sind aber zugleich die Tangentialebenen an die Flächen $\varphi'$ und F' wie eben bewiesen.

Da zwei Kugeln sich wegen der Kongruenz der Dreiecke aus den Radien und der Centrale überall unter demselben Winkel schneiden, so schneiden sich auch die Flächen $\varphi'$ und F' unter demselben Winkel wie die Flächen $\varphi$ und F. Wir haben somit den wichtigsten Satz der Inversion bewiesen:

Zwei inverse Flächen oder Linien schneiden sich in jedem gemeinsamen Punkte unter demselben Winkel wie ihre inversen Flächen oder Linien in inversen Punkten.

Hieraus folgt sofort:

Einem unendlich kleinen Tetraeder entspricht wieder ein unendlich kleines Tetraeder mit den gleichen Winkeln der Flächen und Kanten.

oder:

Jedem unendlich kleinen Tetraeder bezw. sphärischen Dreieck entspricht invers ein kongruent- oder symmetrisch-ähnliches.

Da, wenn der Hauptkreis reell ist, die inversen Punkte an derselben Seite des Kerns liegen, und je näher der eine dem Kern, desto weiter der andere, so tritt Fall 2 bei positiver, Fall 1 bei negativer Potenz ein.

Die Inversion f, auch Kreisverwandtschaft oder Transformation durch reziproke Radien genannt, ist daher eine winkeltreue (konforme) Abbildung des Raumes auf sich selbst.

Sie ist in gewissem Sinne die einzige; da die ähnliche Abbildung oder Abbildung im veränderten Mafsstab durch zwei Inversionen desselben Punktes vom selben Kern aus ersetzt werden kann.

[Ist $OA \cdot OA' = p$ und $OA \cdot OB' = q$, so ist

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{p}{q}.$$

Die Ähnlichkeit ist äufsere, wenn beide Potenzen gleiches Zeichen haben, sonst innere.]

Von der Inversion macht man Anwendung in der Theorie der höheren Kurven und Flächen, in der Potentialtheorie, in der Maschinenbaukunst zur wirklichen Geradführung (Peaucelliersche Geradführung S. S. VIII S. 111), in der Astronomie und in der Kartenzeichnung bei der sogenannten „Stereographischen Projektion“.

Nimmt man O (Fig. 31) auf der Erdkugel an und projiziert sie durch einen von O ausgehenden Strahlenkegel auf eine Ebene $\varepsilon$ parallel der Tangentialebene an die Kugel in O, so ist damit eine Abbildung durch Inversion gesetzt, sobald O mit der Potenz $OF \cdot OF^1 = +p$ ausgestattet wird, wo $F^1$ der Fufs des von O auf $\varepsilon$ gefällten Lotes, F der Endpunkt des von O ausgehenden Durchmessers ist. Denn sind P und $P^1$ ein Paar entsprechende Punkte, so sind OPF und

$OP^1F^1$ ähnlich, da $OPF$ als Peripheriewinkel auf dem Halbkreis ein Rechter, also $OP.OP^1 = OF.OF^1 = p$.

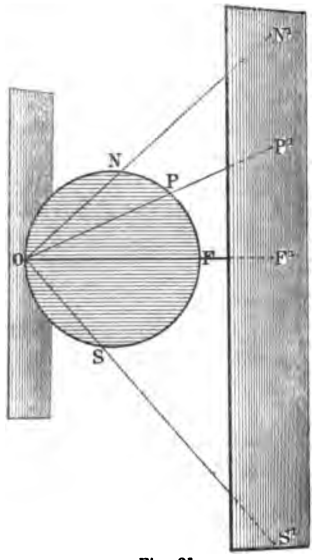



Fig. 31.

Die Meridiane verwandeln sich dann in Kreise durch die dem Nord- und Südpol N und S entsprechenden Punkte $N^1$ und $S^1$, die Parallelkreise in Kreise, welche jene rechtwinklig durchschneiden. Man erreicht dadurch, dafs alle Winkel auf der Karte richtig bleiben, d. h. denen der entsprechenden Linien auf der Erde gleich sind. Die Radien der inversen Meridiane wechseln, dem Meridian durch O selbst entspricht die Gerade $N^1S^1$.

Fällt O mit N zusammen, so werden die inversen Meridiane zu einem Strahlenbüschel durch $S^1$, und die Parallelkreise zu konzentrischen Kreisen um $OS^1$. Fig. 32 stellt die stereographische Projektion eines vollständigen Vierseits dar.

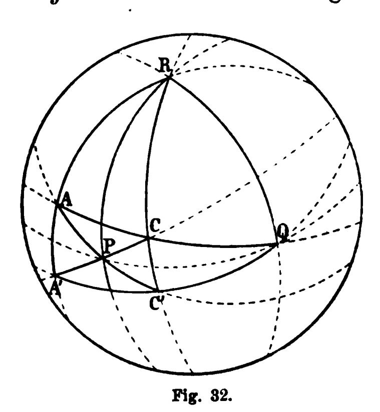



Fig. 32.

Aufgabe 11. Welche Kugel entspricht invers der unendlich fernen Ebene?

(Der Kern als Punktkugel.)

Aufgabe 12. Alle Kugeln eines Komplexes $\Omega$, welche eine nicht zu $\Omega$ gehörige Kugel H berühren, berühren eine zweite Kugel H'.

Fig. 32. A R C Q C' A' ist ein Beispiel der Inversion eines ebenen Vierecks.

Herrosé & Ziemsen, Wittenberg.

G. J.

m

Geduld

Pr

**Grosse A**

Wi
schaftlich
danken ü
stehen un
beschäftig
unterhalte
in einer a
werden.

Z

zum Zw

P

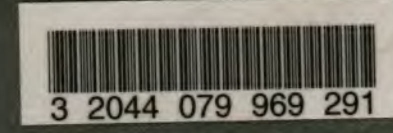
**Originell kartonniert Mk. 2.—.**

— Neue Ausgabe. —

In einigen dieser Spiele dürfte jeder Leser alte Bekannte wiedererkennen, die ihm arges Kopfzerbrechen gemacht haben. Kinderleicht wird indessen die Arbeit, wenn man den Weisungen des Verfassers folgt. Derselbe begnügt sich übrigens nicht mit der Schilderung der Spiele und der Enthüllung ihrer Geheimnisse, sondern erteilt zugleich sehr anziehende kulturgeschichtliche Aufschlüsse.

---

Der Name des Verfassers bürgt für einen gediegenen Inhalt, und somit dürften die Bücher nicht nur dem Mathematiker von Fach, sondern jedem, der sich nur einigermassen für diese Wissenschaft interessiert, ja überhaupt jedem denkenden, gebildeten L[illegible] schaffen.


3 2044 079 969 291